

Pembelajaran 6. Kapita Selekta Matematika

Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi logika, pola bilangan, persamaan linear, persamaan kuadrat dan grafik fungsi polinomial.
2. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika secara mendalam.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menarik kesimpulan matematis dengan menggunakan penalaran logis.
2. Menentukan rumus dari suatu pola bilangan.
3. Menentukan rumus dari suatu deret bilangan.
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan linear.
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.
6. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi linear.
7. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi kuadrat.
8. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan trigonometri.

C. Uraian Materi

Pada bagian ini akan dibahas lima materi, yaitu: (1) logika matematika, (2) pola, barisan, dan deret bilangan, (3) persamaan linear, pertidaksamaan linear, dan grafik fungsi linear, (4) persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat, dan grafik fungsi kuadrat, dan (5) trigonometri.

1. Materi 1 Logika Matematika

Pada materi 1 logika matematika akan dibahas tentang: (a) pernyataan, (b) operasi uner, (c) operasi biner, (d) Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi, dan (e) Konvers, Invers, dan Kontrapositif, (f) Penarikan Kesimpulan

a Pernyataan

Pernyataan adalah kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran benar atau salah, tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang bersamaan. Pernyataan biasa dilambangkan dengan $p, q, r, \dots$

Contoh pernyataan:

p : Herman adalah siswa sekolah dasar kelas VI.

s : $56-19 = 35$.

Adapun contoh bukan pernyataan:

1) Apakah hari ini akan hujan?

2) $9x - 5 = 4x + 2$

Pernyataan dikelompokkan menjadi 2, yaitu pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan tunggal adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya. Pernyataan majemuk merupakan kalimat baru yang diperoleh dari berbagai penggabungan pernyataan tunggal.

Suatu pernyataan hanya bisa bernilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak keduanya dalam waktu yang bersamaan. Kebenaran atau kesalahan dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p dilambangkan dengan $\tau(p)$.

b Operasi Uner

Operasi uner disebut juga dengan operasi negasi atau ingkaran. Operasi negasi merupakan operasi yang hanya berkenaan dengan satu unsur. Operasi negasi biasa dilambangkan dengan $\sim$. Nilai kebenaran negasi sebuah pernyataan adalah kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataannya.

p	$\sim p$
B	S

c Operasi Biner

Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur. Operasi biner berkenaan dengan dua pernyataan. Ada 4 macam operasi biner yang akan dipelajari:

1) Operasi konjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal dihubungkan dengan kata “dan” disebut konjungsi. Operasi konjungsi dilambangkan dengan “ $\wedge$ ”. Sebuah konjungsi benar jika konjung- konjungnya benar, tetapi salah jika salah satu atau kedua-duanya salah. Tabel kebenaran untuk operasi konjungsi adalah sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh:

p : 4 adalah bilangan genap.

q : 4 habis dibagi oleh 2.

$p \wedge q$: 4 adalah bilangan genap dan 4 habis dibagi oleh 2.

2) Operasi disjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata “atau” disebut disjungsi. Operasi disjungsi dilambangkan dengan “ $\vee$ ”. Sebuah disjungsi inklusif benar jika paling sedikit satu disjungnya benar atau kedua-duanya, dan sebuah disjungsi eksklusif benar jika paling sedikit satu disjungnya benar tetapi tidak kedua-duanya. Tabel kebenaran untuk operasi disjungsi (dalam hal ini adalah disjungsi inklusif) adalah sebagai berikut.

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh:

p : Ani akan membawa buku gambar.

q : Ani akan membawa buku tulis.

$p \vee q$: Ani akan membawa buku gambar atau buku tulis.

3) Operasi implikasi

Pernyataan implikasi atau conditional statement atau pernyataan bersyarat merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk “jika p maka q ” dinyatakan dengan $p \rightarrow q$ atau $p \supset q$, dimana p disebut “anteseden” dan q disebut konsekuen. Suatu pernyataan implikasi hanya salah jika antesedennya benar dan konsekuennya salah, dalam kemungkinan yang lain pernyataan implikasi itu adalah benar. Tabel kebenaran untuk operasi implikasi adalah sebagai berikut.

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh:

p : Ani akan membawa buku gambar.

q : Ani akan membawa buku tulis.

$p \vee q$: Ani akan membawa buku gambar atau buku tulis.

4) Operasi biimplikasi

Pernyataan biimplikasi atau *biconditional statement* atau pernyataan bersyarat merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk “ p jika dan hanya jika q ” dinyatakan dengan $p \leftrightarrow q$. Suatu pernyataan biimplikasi benar jika nilai kebenaran p sama dengan nilai kebenaran q . Tabel kebenaran untuk operasi biimplikasi adalah sebagai berikut:

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

p : 3 adalah bilangan ganjil.

q : 3 tidak habis dibagi dua.

$p \leftrightarrow q$: 3 adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika maka 3 tidak habis dibagi 2.

d Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi

Perhatikan tabel kebenaran berikut ini.

P	$\sim p$	$p \vee \sim p$
B	S	B
S	B	B

Apabila dilihat dari tabel tersebut, nilai kebenaran dari $p \vee \sim p$ semuanya bernilai benar. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya benar tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan **tautologi**.

Untuk lebih jelasnya Anda dapat membuktikan nilai kebenaran dari $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ memiliki nilai kebenaran semuanya benar. Pernyataan tersebut juga termasuk **tautologi**.

Sebaliknya pada saat kita menentukan nilai kebenaran dari $\sim[(\sim p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow \sim q)] \wedge r$, nilai kebenaran pernyataan tersebut semuanya salah. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya salah tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan kontradiksi. Adapun kontingensi merupakan pernyataan yang nilai kebenarannya merupakan kumpulan dari benar dan salah di luar tautologi dan kontradiksi.

e Konvers, Invers, dan Kontraposisif

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi $p \rightarrow q$ merupakan suatu tautologi, maka $p \rightarrow q$ dinamakan implikasi logis.

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi $p \leftrightarrow q$ merupakan suatu tautologi, maka $p \leftrightarrow q$ dinamakan ekuivalen logis.

Perhatikan pernyataan kondisional ($p \rightarrow q$) berikut ini.

Jika hari ini hujan maka saya berada di rumah.

Kemudian perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini.

- (a) Jika saya berada di rumah maka hari ini hujan. ($q \rightarrow p$)
- (b) Jika hari ini tidak hujan maka saya tidak berada di rumah.
($\sim p \rightarrow \sim q$)
- (c) Jika saya tidak berada di rumah maka hari ini tidak hujan.
($\sim q \rightarrow \sim p$)

Pernyataan (a) dinamakan konvers, pernyataan (b) dinamakan invers, dan pernyataan (c) dinamakan kontrapositif.

Dari pernyataan tersebut, diperoleh pernyataan-pernyataan yang saling ekuivalen (nilai kebenaran dari dua pernyataan tersebut sama), yaitu:

- (a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
- (b) $(q \rightarrow p) \equiv (\sim p \rightarrow \sim q)$

Contoh:

Tentukan konvers, invers, dan kontrapositif dari pernyataan berikut ini: Jika $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Penyelesaian:

Dari pernyataan tersebut:

p : $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

q : $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

$\sim p$: $a \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

$\sim q$: $a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Konvers : Jika $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Invers : Jika $a \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Kontrapositif : Jika $a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

f Penarikan Kesimpulan

Argumen adalah serangkaian pernyataan-pernyataan yang mempunyai ungkapan pernyataan penarikan kesimpulan. Argumen terdiri dari pernyataan-pernyataan yang terdiri dari dua kelompok, yaitu kelompok premis-premis dan kelompok konklusi.

Contoh:

(a) Jika Rahmi rajin belajar maka Rahmi akan siap menghadapi ujian.

(b) Rahmi tidak siap menghadapi ujian.

(c) Jadi, Rahmi tidak rajin belajar.

Pernyataan no (a) dan (b) dinamakan premis-premis, dan pernyataan no (c) dinamakan konklusi.

Dalam logika dikenal beberapa cara dalam pengambilan kesimpulan, yaitu sebagai berikut.

1) Modus Ponens

Modus ponens adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ atau $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$. Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$	premis 1
p	premis 2
$\therefore q$	kesimpulan

Contoh:

Tentukan kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini:

(a) Jika hari ini hujan, maka Andi berada di rumah

(b) Jika Andi berada di rumah, maka Andi akan tidur

(c) Hari ini hujan Penyelesaian:

Dari pernyataan-pernyataan tersebut:

p : Hari ini hujan.

q : Andi berada di rumah.

r : Andi akan tidur

Dari pernyataan (a) dan (c) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika hari ini hujan maka Andi berada di rumah. (a)

p	Hari ini hujan. (c)
$\therefore q$	Andi berada di rumah (d)

Pernyataan (d) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (b) belum kita gunakan. Dari pernyataan (b) dan (d) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$q \rightarrow r$ Jika Andi berada di rumah maka Andi akan tidur. (a)

q Andi berada di rumah. (c)

$\therefore r$ Andi akan tidur (e)

Pernyataan (e) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan. Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Andi akan tidur.

2) Modus Tolen

Modus Tolen adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ atau $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$. Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ premis 1

$\sim q$ premis 2

$\therefore \sim p$ kesimpulan

Contoh:

Tentukan kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini.

- (a) Jika Ani rajin belajar maka Ani lulus ujian.
- (b) Jika Ani lulus ujian maka Ani diberi hadiah oleh Ayah.
- (c) Jika Ani tidak rajin belajar maka Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.
- (d) Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah.

Penyelesaian:

Dari premis-premis tersebut:

p : Ani rajin belajar.

$\sim p$: Ani tidak rajin belajar.

q : Ani lulus ujian.

r : Ani diberi hadiah oleh Ayah.

$\sim r$: Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah.

s : Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

Dari pernyataan atau premis (b) dan (d) dengan menggunakan modus tollens diperoleh:

$q \rightarrow r$ Jika Ani lulus ujian maka Ani diberi hadiah oleh Ayah. (b)

$\sim r$ Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah. (d)

$\therefore \sim q$ Ani tidak lulus ujian (e)

Pernyataan (e) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (a) dan (c) belum kita gunakan.

Dari pernyataan atau premis (a) dan (e) dengan menggunakan modus tollens diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika Ani rajin belajar maka Ani lulus ujian. (a)

$\sim q$ Ani tidak lulus ujian. (e)

$\therefore \sim p$ Ani tidak rajin belajar (f)

Pernyataan (f) masih belum merupakan hasil kesimpulan karena pernyataan atau premis (c) belum kita gunakan.

Dari pernyataan atau premis (c) dan (f) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$\sim p \rightarrow s$ Jika Ani tidak rajin belajar maka Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan. (c)

$\sim p$ Ani tidak rajin belajar. (f)

$\therefore s$ Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan (g)

Pernyataan (g) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan. Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

3) Silogisme

Silogisme adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ premis 1} \\ q \rightarrow r \text{ premis 2} \\ \hline \therefore p \rightarrow r \text{ kesimpulan} \end{array}$$

Contoh:

Tentukan kesimpulan dari premis-premis di bawah ini:

- (a) Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan akan pergi ke Surabaya.
- (b) Jika Intan pergi ke Surabaya maka Intan menginap di rumah Sandra.
- (c) Jika Intan tidak bertemu Kiki maka Intan tidak menginap di rumah Sandra.

Penyelesaian:

Dari premis-premis tersebut:

- p : Pak Herman pergi ke Jakarta.
- q : Intan akan pergi ke Surabaya.
- r : Intan menginap di rumah Sandra.
- $\sim r$: Intan tidak menginap di rumah Sandra.
- $\sim s$: Intan tidak bertemu Kiki.

Dari pernyataan (a) dan (b) menggunakan silogisme diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan akan pergi ke Surabaya. (a)

$q \rightarrow r$ Jika Intan pergi ke Suranaya maka Intan menginap di rumah

Sandra. (b)

$\therefore p \rightarrow r$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan menginap di rumah Sandra.(d)

Pernyataan (d) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara.

Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (c) belum kita gunakan.

Sekarang perhatikan premis (c) dan (d) yang berbentuk:

$$\sim s \rightarrow \sim r \text{ (c)}$$

$$p \rightarrow r \text{ (d)}$$

Kedua pernyataan tersebut tidak dapat kita gunakan dengan silogisme, maka kita harus merubah pernyataan (c) ke bentuk ekuivalennya. Bentuk ekuivalen dari pernyataan (c) adalah $r \rightarrow s$.

Pernyataan (d) dan bentuk ekuivalen pernyataan (c) menggunakan silogisme diperoleh:

$$p \rightarrow r \text{ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan menginap di rumah Sandra. (d)}$$

$$r \rightarrow s \text{ Jika Intan menginap di rumah Sandra maka Intan bertemu Kiki. (a)}$$

$$\therefore p \rightarrow s \text{ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan bertemu Kiki. (e)}$$

Pernyataan (e) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan.

Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan bertemu Kiki.

Selain tiga aturan penarikan kesimpulan di atas, ada beberapa aturan penarikan kesimpulan yang lain dengan menggunakan kata kunci “semua” ataupun “beberapa”. Aturan penarikan kesimpulan yang melibatkan kata kunci tersebut antara lain:

- (a) Semua A adalah B.
Semua C adalah A.
Jadi semua C adalah B.
- (b) Beberapa A adalah bukan B.
Semua A adalah C.
Jadi beberapa C adalah bukan B.
- (c) Semua A adalah B.
Beberapa C adalah bukan B.
Jadi, beberapa C adalah bukan A.
- (d) Semua A adalah B.
Beberapa C adalah A.

Jadi, beberapa C adalah B.

(e) Tak ada A yang merupakan B.

Semua A adalah C.

Jadi, beberapa C adalah bukan B.

Contoh:

Tentukan kesimpulan dari:

(a) Semua segiempat adalah poligon.

Semua persegi panjang adalah segiempat.

Kesimpulan: Semua persegi panjang adalah polygon.

(b) Beberapa guru adalah bukan sarjana pendidikan.

Semua guru adalah pendidik.

Kesimpulan: Beberapa pendidik adalah bukan sarjana pendidikan.

Coba Anda cari contoh yang lain dan tentukan kesimpulannya.

2. Materi 2 Pola, Barisan, dan Deret Bilangan

Sebelum membahas mengenai pola bilangan, terlebih dahulu akan dimulai dengan membahas sedikit mengenai penalaran. Dalam matematika, penalaran dibagi menjadi penalaran deduktif dan penalaran induktif.

a. Penalaran deduktif

Penalaran deduktif atau berpikir deduktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyataan yang bersifat umum. Dasar penalaran deduktif adalah kebenaran suatu pernyataan haruslah berdasarkan pada kebenaran pernyataan lain.

Contoh:

Buktikanlah: Jika m dan n adalah bilangan-bilangan genap, maka $m + n$ adalah bilangan genap.

Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, maka kita akan menggunakan proses berpikir deduktif. Artinya membuktikan pernyataan tersebut haruslah berdasarkan

kebenaran ataupun definisi yang sudah jelas kebenarannya, tanpa menggunakan contoh.

Misalkan m dan n adalah sebarang bilangan genap, terdapat r dan s sedemikian hingga $m = 2r$ dan $n = 2s$ (definisi bilangan genap).

$$m + n = 2 \times r + 2 \times s$$

$$m + n = 2 \times (r + s) \text{ (sifat distributif, sifat tertutup)}$$

Karena $r + s$ adalah suatu bilangan bulat, maka berdasarkan definisi bilangan genap diperoleh bahwa $m + n$ adalah bilangan genap.

b. Penalaran induktif

Penalaran induktif atau berpikir induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Penalaran induktif pada prinsipnya adalah menyelesaikan persoalan matematika tanpa menggunakan rumus (dalil), melainkan dimulai dengan memperhatikan data/soal. Dari data tersebut diproses sehingga berbentuk kerangka/pola dasar tertentu yang kita cari sendiri, sedemikian rupa dapat ditarik sebuah kesimpulan.

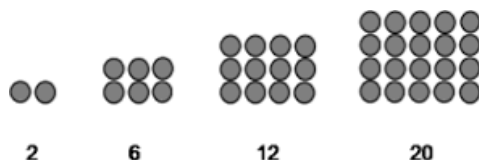
Penalaran induktif dapat meliputi pengenalan pola, dugaan, dan pembentukan generalisasi.

c. Pola Bilangan, Barisan dan Deret Bilangan

Berikut akan disajikan beberapa contoh pola bilangan, antara lain sebagai berikut.

1) Pola persegi panjang

Pola persegi panjang digambarkan dengan pola seperti berikut ini.



Banyak titik pada pola persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, Untuk menentukan rumus suku ke- n dari banyak titik pada pola persegi panjang, maka Anda harus perhatikan pola suku ke- n pada titik-titik di atas.

Perhatikan tabel di bawah ini untuk membantu kita membuat dugaan rumus suku ke- n .

Suku ke- n	Banyak titik (vertikal)	Banyak titik (horizontal)	Banyak titik seluruhnya
1	1	2	2
2	2	3	6
3	3		12
4			20
n	n	$n + 1$	$n(n + 1)$

Rumus pola bilangan persegi panjang adalah:

$$U_n = n(n + 1), n \in \text{bilangan asli.}$$

Catatan: U_n = suku ke- n .

Contoh:

Tentukanlah banyak titik pola persegi panjang pada suku ke-15!

Penyelesaian:

Banyak titik pada suku ke-15 adalah U_{15} .

$$U_n = n(n + 1)$$

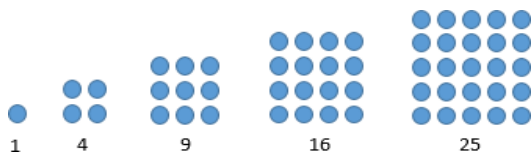
$$U_{15} = 15(15 + 1)$$

$$U_{15} = 240.$$

Jadi banyak titik pada suku ke-15 adalah 240.

2) Pola persegi

Pola persegi digambarkan dengan pola seperti berikut ini.



Pola bilangan persegi terdiri dari 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,

Melalui proses yang sama seperti menemukan dugaan rumus pola persegi panjang, coba Anda lakukan proses menemukan pola dugaan untuk pola persegi! Apakah rumus yang Anda peroleh adalah n^2 ?

Rumus pola bilangan persegi adalah $U_n = n^2, n \in \text{bilangan asli.}$

Catatan: U_n = suku ke- n .

3) Pola segitiga

Pola segitiga digambarkan sebagai berikut.

Pola bilangan segitiga terdiri dari 1, 3, 6, 10, 15,

Setelah memperhatikan bilangan yang termasuk pada pola bilangan segitiga, dapatkah Anda membuat dugaan rumus pola bilangan segitiga melalui pola bilangan persegi panjang? Jika Anda belum menemukannya, maka lakukan langkah seperti menemukan rumus persegi panjang yang telah dicontohkan pada bagian 1). Apakah rumus yang Anda peroleh adalah $U_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Rumus pola bilangan segitiga adalah:

$$U_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad n \in \text{bilangan asli}$$

Catatan: U_n = suku ke- n

4) Pola bilangan Fibonacci

Pola bilangan Fibonacci ditemukan oleh matematikawan Italia yang bernama Leonardo da Pisa. Perhatikan contoh pola bilangan Fibonacci berikut ini: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, Informasi apa yang dapat Anda peroleh dari bilangan-bilangan tersebut? Informasi yang Anda peroleh dari barisan bilangan tersebut adalah suku ke-3 merupakan hasil penjumlahan dari suku ke-1 dan suku ke-2, suku ke-4 merupakan hasil penjumlahan dari suku ke-2 dan suku ke-3, dan seterusnya. Dengan kata lain pada pola bilangan Fibonacci sebuah suku tertentu merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya, dapat ditulis dengan:

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}.$$

Catatan: U_n = suku ke- n .

Dapatkah Anda membuat bilangan-bilangan yang mengikuti pola bilangan Fibonacci?

5) Barisan dan Deret Aritmatika

Perhatikan beberapa barisan bilangan berikut ini:

(a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,

(b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,

(c) 11, 14, 17, 20, 23,

(d) 58, 54, 50, 46, 42, 38,

Apabila kita perhatikan, pada barisan-barisan tersebut, selisih dua buah bilangan pada setiap barisan adalah tetap (coba Anda identifikasi hal ini!). Barisan yang memiliki karakteristik seperti ini dinamakan **barisan aritmatika**. Selisih antara dua suku pada barisan aritmatika dinamakan **beda** (b).

Sebuah barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmatika jika untuk setiap n berlaku $U_n - U_{n-1} = b$, b adalah sebuah konstanta. Sebuah barisan dinamakan barisan aritmatika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.

Misalkan kita memiliki suku pertama dari sebuah barisan aritmatika adalah a dan bedanya adalah b , maka akan diperoleh:

$$U_1 = a$$

$$U_2 - U_1 = b \leftrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \leftrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b,$$

dan seterusnya, sehingga suku-suku barisan aritmatika dapat disusun sebagai berikut: $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$

U_1	U_2	U_3	U_4	$\dots$	U_n
a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b$	$\dots$	$a + (n - 1)b$

Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b,$$

Keterangan:

U_n = suku ke- n

a = suku pertama

b = beda

Perhatikan penjumlahan bilangan-bilangan berikut ini:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

Berapakah hasil penjumlahan bilangan-bilangan tersebut?

Kita dapat melakukannya seperti salah satu matematikawan Carl Frederick Gauss (1777 – 1855), dengan cara berikut ini:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 &= S_{100} \\
 100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 &= S_{100} \\
 \hline
 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 &= 2 \times S_{100} \\
 100 \times 101 &= 2 \times S_{100} \\
 S_{100} &= \frac{100 \times 101}{2} = 5050
 \end{aligned}$$

Bentuk $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$ adalah suatu contoh deret aritmatika. Deret aritmatika adalah jumlah suku-suku barisan aritmatika, dapat ditulis dengan:

Misalkan S_n adalah jumlah n suku pertama pada suatu barisan aritmatika.

$$\begin{aligned}
 S_n &= U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n, \text{ atau} \\
 S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b].
 \end{aligned}$$

Menemukan rumus umum jumlah suku ke- n adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b] \\
 S_n &= [a + (n - 1)b] + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \\
 \hline
 2S_n &= [2a + (n - 1)b] + \dots + [2a + (n - 1)b] \\
 2S_n &= n[2a + (n - 1)b] \\
 S_n &= \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b] \\
 S_n &= \frac{1}{2} n(a + U_n)
 \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukanlah jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6!

Penyelesaian:

Sebelum menentukan jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6, maka kita akan menentukan terlebih dahulu bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6.

Bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6 adalah:

$$204, 210, 216, \dots, 294.$$

Berdasarkan barisan tersebut:

$$a = 204$$

$$b = 6$$

$$U_n = 294$$

Sebelum menentukan jumlah, maka tentukan terlebih dahulu banyak suku pada barisan tersebut atau kita akan mencari n .

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$294 = 204 + (n - 1)6$$

$$90 = (n - 1)6$$

$$(n - 1) = 15$$

$$n = 16$$

Jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6,

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$S_{16} = \frac{1}{2} \times 16 (204 + 294)$$

$$S_{16} = 8 \times 498$$

$$S_{16} = 3984$$

Jadi jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6 adalah 3.984.

6) Barisan dan Deret Geometri

Perhatikan beberapa pola barisan berikut ini:

(a) 1, 2, 4, 8, 16,

(b) 64, -16, 4, -1,

(c) 5, -15, 45, -225,

Jika kita amati, barisan bilangan tersebut tidak memiliki selisih yang tetap seperti pada barisan aritmatika. Barisan-barisan tersebut memiliki hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya yang tetap (coba Anda buktikan!). Barisan yang memiliki hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap maka dinamakan barisan geometri. Konstanta hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya yang selalu tetap dinamakan rasio (r).

Suatu barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika hasil bagi setiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap.

Misalkan kita memiliki sebuah barisan geometri dengan:

$U_1 = a$, rasio = r , maka akan kita dapatkan:

$$\frac{U_2}{U_1} = r \Leftrightarrow U_2 = U_1 \times r = a \times r = ar$$

$$\frac{U_3}{U_2} = r \Leftrightarrow U_3 = U_2 \times r = ar \times r = ar^2$$

$$\frac{U_4}{U_3} = r \Leftrightarrow U_4 = U_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3$$

dan seterusnya, sehingga pola umum dari barisan geometri adalah:

$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$

Dari pola tersebut maka $U_n = a \times r^{n-1}$.

Setelah mengetahui rumus suku ke- n pada barisan geometri, sekarang bagaimana dengan penjumlahan suku-suku pada barisan geometri atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \dots$$

Misalkan S_n adalah jumlah n suku pertama pada suatu barisan geometri.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$r \times S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n -$$

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}, r > 1$$

Contoh:

Seutas tali dipotong menjadi 7 bagian dengan ukuran panjangnya membentuk deret geometri. Jika panjang bagian tali yang terpendek adalah 3 cm dan panjang bagian tali terpanjang adalah 192 cm, maka panjang tali seluruhnya adalah

Penyelesaian:

$$a = 3, U_n = 192, n = 7.$$

Dari permasalahan tersebut yang belum diketahui adalah rasio, maka sebelum kita menghitung jumlah panjang tali seluruhnya, kita akan menentukan ratio terlebih dahulu.

$$U_n = a \times r^{n-1}$$

$$192 = 3 \times r^{7-1}$$

$$r^6 = 64$$

$r = 2$, karena $r > 1$, maka:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{3(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = \frac{3(128 - 1)}{1} = 381$$

Jadi, panjang tali seluruhnya adalah 381 cm.

3. Materi 3 Persamaan Linear, Pertidaksamaan Linear, dan Grafik Fungsi Linear

Persamaan merupakan pernyataan matematika yang terdiri dari dua buah yang dipisahkan dengan tanda “=”. Persamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “=”. Penyelesaian dari suatu persamaan merupakan sebarang bilangan yang membuat nilai persamaan itu benar jika bilangan tersebut disubstitusikan (digantikan) pada variabel. Persamaan linear yang akan dibahas adalah persamaan linear satu variabel dan persamaan linear dua variabel.

a Persamaan linear satu variabel

Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah:

$$ax + b = c, a \neq 0.$$

Contoh:

Tentukan nilai x dari persamaan berikut ini:

1) $5x - 4 = 26$

$$\Leftrightarrow 5x - 4 = 26$$

$$\Leftrightarrow 5x - 4 + 4 = 26 + 4$$

$$\Leftrightarrow 5x = 30$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

2) $3(x-4) = 7(x+2) - 5x$

$$\Leftrightarrow 3(x-4) = 7(x+2) - 5x$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 = 7x + 14 - 5x$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 = 2x + 14$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 + 12 = 2x + 14 + 12$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x = 2x - 2x + 26$$

$$\Leftrightarrow x = 26$$

3) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{4} = 12$

$$\Leftrightarrow \frac{x(4)}{3(4)} + \frac{2x(3)}{4(3)} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{12} + \frac{6x}{12} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x}{12} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x}{12} = 12$$

$$\Leftrightarrow 10x = 144$$

$$\Leftrightarrow x = 14,4$$

b. Persamaan linear dua variabel

Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah:

$$ax + by = c, \text{ dengan } a \text{ dan } b \neq 0.$$

Contoh:

- 1) Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$$6x + 2y = 8$$

$$5x - y = 12$$

Penyelesaian:

a) Cara eliminasi:

Menentukan nilai x

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12 \text{ (kalikan dengan 2)}$$

$$\text{Persamaan (2) menjadi } 10x - 2y = 24$$

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 10x - 2y = 24 \quad +$$

$$16x = 32 \quad \leftrightarrow \quad x = 2$$

Menentukan nilai y

$$(1) 6x + 2y = 8 \quad \text{(kalikan dengan 5)}$$

$$(2) 5x - y = 12 \quad \text{(kalikan dengan 6)}$$

Persamaannya menjadi:

$$(1) 30x + 10y = 40$$

$$(2) 30x - 6y = 72 \quad -$$

$$16y = -32 \quad \leftrightarrow \quad y = -2$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, -2\}$

b) Cara substitusi

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12$$

$$\text{Persamaan (2) menjadi } -y = 12 - 5x \text{ atau } y = 5x - 12.$$

$$\text{Persamaan (1) } 6x + 2y = 8$$

$$6x + 2(5x - 12) = 8$$

$$6x + 10x - 24 = 8$$

$$16x = 32$$

$$\begin{aligned}x &= 2 \\y &= 5x - 12 \\y &= 5(2) - 12 \\y &= -2\end{aligned}$$

c) Cara gabungan eliminasi dan substitusi

Menentukan nilai x

$$\begin{aligned}(1) \quad 6x + 2y &= 8 \\(2) \quad 5x - y &= 12 \quad (\text{kalikan dengan } 2) \\ \text{Persamaan (2) menjadi } 10x - 2y &= 24 \\(1) \quad 6x + 2y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \hline (2) \quad 10x - 2y = 24 \quad + \\ \hline 16x = 32 \\ x = 2 \\ 5x - y = 12 \\ 5(2) - y = 12 \\ y = -2 \end{array}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, -2\}$

- 2) Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9 tahun. Umur ayah sekarang adalah ... tahun.

Penyelesaian:

Misalkan umur ayah = a , umur Budi = b

Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan umur Budi:

$$\begin{aligned}(a - 7) &= 6(b - 7) \\(a - 7) &= 6b - 42 \\a - 7 &= 6b - 42 \\a &= 6b - 35\end{aligned}$$

Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9.

$$2(a + 4) = 5(b + 4) + 9$$

$$2a + 8 = 5b + 29$$

$$2a = 5b + 21$$

(dari persamaan sebelumnya $a = 6b - 35$)

$$2(6b - 35) = 5b + 21$$

$$12b - 70 = 5b + 21$$

$$7b = 91$$

$$b = 13$$

$$a = 6b - 35$$

$$a = 6(13) - 35$$

$$a = 43$$

Jadi, umur ayah sekarang adalah 43 tahun.

- 3) Harga 7 buah pulpen dan 3 buah penghapus adalah Rp11.150, sedangkan harga 5 buah pulpen dan 5 buah penghapus adalah Rp10.250. Berapakah harga 8 buah pulpen dan 7 buah penghapus?

Penyelesaian:

Misalkan harga pulpen = x , harga penghapus = y

Bentuk matematika menjadi:

$$7x + 3y = 11.150$$

$$5x + 5y = 10.250$$

Dengan menggunakan metode gabungan eliminasi dan substitusi, diperoleh nilai $x = \text{Rp}1.250$ dan $y = \text{Rp}800$ (coba Anda buktikan!).

Harga 8 pulpen dan 7 penghapus adalah Rp15.600.

c. Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel dengan derajat tertingginya satu dan dihubungkan dengan tanda " $\neq$ ", " $<$ ", " $>$ ", " $\leq$ ", atau " $\geq$ ".

Catatan:

Prinsip yang digunakan: jika kedua ruas dikalikan/dibagi dengan bilangan negatif, maka tanda pertidaksamaan harus dirubah, misalnya dari $<$ atau $\leq$ menjadi $>$ atau $\geq$ ataupun sebaliknya.

Contoh:

- 1) Tentukan himpunan penyelesaian dari: a. $4x + 10 > 26$

$$4x + 10 > 26 - 10$$

$$\leftrightarrow 4x - 10 + 10 > 16$$

$$\leftrightarrow 4x > 16$$

$$\leftrightarrow x > 4$$

Himpunan penyelesaiannya adalah: $\{x|x > 4, x \in \mathbb{R}\}$.

- 2) $2(x - 4) < 7(x + 2) - 4x$

$$2(x - 4) < 7(x + 2) - 4x$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 < 7x + 14 - 4x$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 < 3x + 14$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 + 8 < 3x + 14 + 8$$

$$\leftrightarrow 2x - 3x < 3x - 3x + 26$$

$$\leftrightarrow -x < 26$$

$$\leftrightarrow x > -26$$

Himpunan penyelesaiannya adalah: $\{x|x > -26, x \in \mathbb{R}\}$.

d. Grafik Fungsi Linear

Sebuah fungsi linear $y = f(x)$ dapat kita gambarkan grafik fungsi linearnya. Untuk menggambar grafik suatu fungsi terlebih dahulu dicari pasangan-pasangan terurut dari fungsi itu, kemudian menggambar pasangan itu sebagai titik pada suatu sistem koordinat lalu menghubungkan titik-titik tersebut.

Grafik fungsi linear yang memiliki kemiringan garis (gradien) m dan melewati titik $A(x_1, y_1)$, persamaan garisnya adalah:

$$(y - y_1) = m(x - x_1).$$

Misalkan terdapat suatu grafik fungsi linear yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka kemiringan garis itu adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, yaitu:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ atau merupakan bentuk lain dari } (y - y_1) = m(x - x_1)$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis g yang melalui titik $(1,2)$ dan $(3,4)$!

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

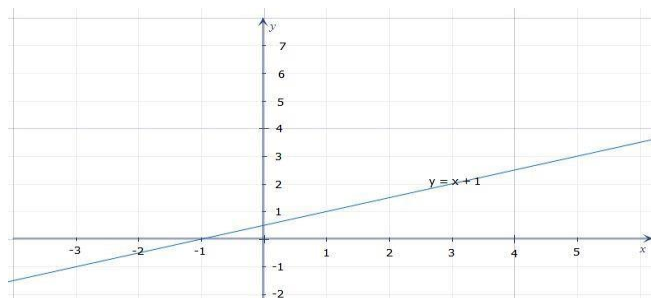
$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{4 - 2}{3 - 1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{2}$$

$$2(y - 2) = 2(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$y = x + 1$$



Apabila terdapat dua buah garis, maka kedua garis tersebut mungkin akan berpotongan di satu titik (pada bahasan ini yang akan dibahas adalah dua garis yang saling tegak lurus) atau mungkin juga tidak berpotongan (yang selanjutnya dinamakan garis sejajar). Hubungan antara dua garis atau grafik fungsi linear:

1) Dua garis sejajar

Dua garis dikatakan sejajar jika gradien (kemiringan) kedua garis tersebut sama, ditulis dengan $m_1 = m_2$. Dengan kata lain dua garis dikatakan sejajar apabila dua garis tersebut tidak memiliki titik potong. Ilustrasi paling sederhana dari dua garis sejajar adalah rek kereta api.

Contoh:

Tentukan persamaan garis l yang melalui titik $(-3,5)$ dan sejajar dengan garis g melalui titik $(8,4)$ dan $(4,-2)$!

Penyelesaian:

Menentukan gradien garis g .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leftrightarrow m = \frac{4 - (-2)}{8 - 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Menentukan persamaan garis l .

Karena gradien dua garis yang sejajar adalah sama, $m_1 = m_2 = \frac{3}{2}$

Maka:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$(y - 5) = \frac{3}{2} (x - (-3))$$

$$\leftrightarrow 2(y - 5) = 3(x + 3)$$

$$\leftrightarrow 2y - 10 = 3x + 9$$

$$\leftrightarrow 2y = 3x + 19$$

$$\leftrightarrow y = \frac{3x + 19}{2}$$

2) Dua garis saling tegak lurus

Dua garis dikatakan tegak lurus jika perkalian dua gradien sama dengan -1 atau dapat ditulis $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh:

Tentukan persamaan garis k yang melalui titik $(-3,5)$ dan tegak lurus dengan garis h yang melalui titik $(8,4)$ dan $(4,-2)$!

Penyelesaian:

Menentukan gradien garis h

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{8 - 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Menentukan persamaan garis k

Karena gradien dua garis yang tegak lurus adalah $m_1 \cdot m_2 = -1$, sehingga $m_2 = -\frac{2}{3}$

Maka:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$\leftrightarrow (y - 5) = -\frac{2}{3} (x - (-3))$$

$$\leftrightarrow 3 (y - 5) = -2 (x + 3)$$

$$\leftrightarrow 3y - 15 = -2x - 6$$

$$\leftrightarrow 3y = -2x + 9$$

$$\leftrightarrow y = \frac{-2x + 9}{3}$$

4. Materi 4 Persamaan Kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat, dan Grafik Fungsi Kuadrat

Pada materi 4 akan dibahas tentang persamaan kudrat dan pertidaksamaan Kuadrat

a Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertinggiya dua yang dihubungkan dengan tanda “=”. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah: $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$. Untuk menentukan himpunan penyelesaian atau akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 dari persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan memfaktorkan, melengkapi bentuk kuadrat, menggunakan rumus kuadratis, dan menggambar grafik fungsi kuadrat.

Contoh:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat dari $x^2 - 3x - 18 = 0$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat, perhatikan cara-cara berikut ini:

1) Memfaktorkan

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\leftrightarrow (x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\leftrightarrow x = 6 \text{ atau } x = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

2) Melengkapkan kuadrat

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 3x = 18$$

$$\leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ kedua ruas ditambahkan dengan } \left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$x_1 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$x_1 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \quad x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{12}{2} = 6 \quad x_1 = -\frac{6}{2} = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

3) Rumus kuadratis

Dari persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 18 = 0$, maka:

$a = 1$, $b = -3$, dan $c = -18$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9+72}}{2}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$x_2 = \frac{3-9}{2} \quad \text{atau} \quad x_1 = \frac{-6}{2} = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

b. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertinggiya dua yang dihubungkan dengan tanda $\neq$, atau $<$, atau $>$, atau $\leq$, atau $\geq$.

Contoh:

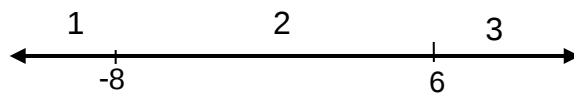
Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 2x - 48 < 0$.

Penyelesaian:

Langkah awal, ubahlah pertidaksamaan tersebut menjadi sebuah persamaan, sehingga menjadi $x^2 + 2x - 48 = 0$.

Dengan menggunakan pemfaktoran, diperoleh $x_1 = -8$ atau $x_2 = 6$ (*coba Anda buktikan menggunakan salah satu cara seperti sebelumnya!*)

Untuk menentukan daerah hasilnya, kita akan menggunakan bantuan garis bilangan, seperti pada gambar berikut ini:



Berdasarkan gambar di atas, pada garis bilangan dibagi menjadi 3 daerah, yaitu daerah 1, daerah 2, dan daerah 3. Untuk memudahkan kita akan coba mengambil $x = 0$, yang berada pada daerah 2 (*mengapa?*) yang kemudian kita substitusikan ke: $x^2 + 2x - 48 = 0^2 + 2(0) - 48 = -48$, hasilnya adalah bilangan negatif, artinya pada daerah $x^2 + 2x - 48 < 0$. Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x | -8 < x < 6, x \in \mathbb{R}\}$.

Akar-akar persamaan kuadrat memungkinkan bilangan real atau mungkin juga bilangan imajiner. Hal tersebut ditentukan oleh nilai D atau diskriminan. Dengan melihat nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$), jenis-jenis akar persamaan kuadrat dibagi tiga, yaitu:

- 1) Jika $D > 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan real dan berbeda.
- 2) Jika $D = 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan real dan kembar (sama).
- 3) Jika $D < 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan kompleks dan berbeda.

Contoh:

Tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat dari persamaan kuadrat berikut ini:

1) $x^2 - 3x - 18 = 0$

Penyelesaian:

Dengan memeriksa nilai diskriminan,

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (-18)$$

$$D = 9 + 72$$

$$D = 81$$

Karena $D > 0$ maka kedua akar persamaan kuadrat tersebut merupakan bilangan real dan berbeda (terbukti pada contoh sebelumnya).

$$2) \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

Penyelesaian:

Dengan memeriksa nilai diskriminan,

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \times (1) \times (25)$$

$$D = 100 - 100$$

$$D = 0$$

Karena $D = 0$ maka, kedua akar persamaan kuadrat tersebut real dan kembar (coba Anda buktikan berapa nilai akar persamaan kuadrat tersebut!).

Bagaimana jika kita diminta menentukan bentuk persamaan kuadrat yang akar-akar persamaan kuadrat tersebut diketahui? Perhatikan contoh berikut ini.

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah 6 dan -4!

Karena akarnya adalah 6 dan -4, maka dapat kita tuliskan

$$(x - 6)(x - (-4)) = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 6x + 4x - 24 = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

Secara umum, bentuk tersebut dapat ditulis:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Ingat kembali rumus kuadratis yang telah dipelajari sebelumnya, yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dapat dijabarkan:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ maka:}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b)^2 + (-b)(-\sqrt{b^2 - 4ac}) + (\sqrt{b^2 - 4ac})(-b) - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b)^2 + (-b)(\sqrt{b^2 - 4ac}) + (-b)(\sqrt{b^2 - 4ac}) - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b)^2 + (-)(b)^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(b)^2 - (b^2) - 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-c}{a}$$

Menentukan persamaan kuadrat dapat digunakan rumus:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Contoh:

Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 1 = 0$ adalah a dan b . Tentukanlah persamaan kuadrat baru yang akarnya $2a$ dan $2b$!

Dari persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 1 = 0$, diperoleh:

$$a + b = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{3}$$

$$a \times b = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$$

Persamaan kuadrat yang baru:

$$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a + b) = 2 \times \frac{-2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$x_1 \times x_2 = 2a \times 2b = 4 \times a \times b = 4 \times \frac{-1}{3} = \frac{-4}{3}$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4}{3}\right)x + \frac{-4}{3} = 0$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

c Grafik Fungsi Kuadrat

Setelah mempelajari tentang akar-akar persamaan kuadrat, maka selanjutnya akan dibahas mengenai grafik fungsi kuadrat.

Berikut langkah-langkah menggambar grafik fungsi kuadrat

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

- 1) Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y . Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$, dan titik potong dengan sumbu y diperoleh jika $x = 0$.
- 2) Menentukan persamaan sumbu simetri, garis $x = -\frac{b}{2a}$
- 3) Menentukan koordinat titik balik $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Misalkan gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$! Langkah yang akan kita lakukan adalah sebagai berikut.

- 1) Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y .

Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 1$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah (1,0) dan (3,0). Titik potong dengan sumbu y , diperoleh jika $x = 0$.

$$f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$$

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah (0,3)

- 2) Persamaan sumbu simetri.

Persamaan sumbu simetri $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ adalah garis $x = -\frac{b}{2a}$

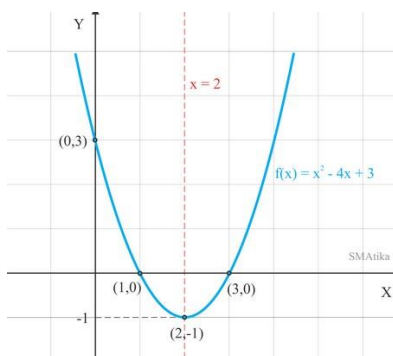
sumbu simetri pada $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah:

$$= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{(2)(1)} = 2$$

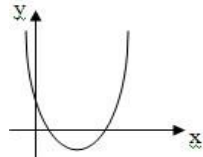
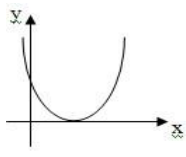
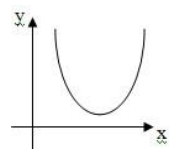
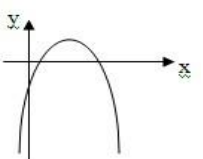
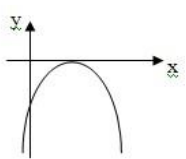
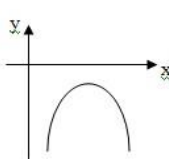
3) Menentukan koordinat titik balik.

Karena sumbu simetri $x = 2$, maka $f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$
koordinat titik balik $(2, -1)$.

Diperoleh sketsa grafik sebagai berikut:

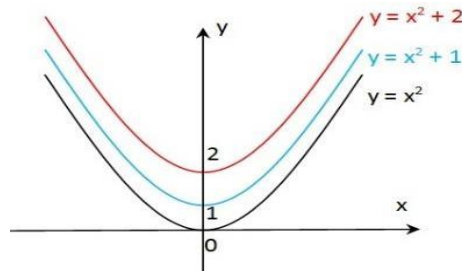


Berdasarkan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, dan nilai a , maka secara geometris akan terdapat 6 kemungkinan bentuk grafik fungsi, yaitu:

$D > 0$ dan $a > 0$	$D = 0$ dan $a > 0$	$D < 0$ dan $a > 0$
		
$D > 0$ dan $a < 0$	$D = 0$ dan $a < 0$	$D < 0$ dan $a < 0$
		

4) Pergeseran Grafik Fungsi Kuadrat

Sebuah grafik fungsi kuadrat, akan dapat digeser searah sumbu X ataupun searah sumbu Y . Misalkan terdapat sebuah grafik fungsi kuadrat $y = f(x)$, akan digeser sejauh m ke arah kanan, dan n satuan ke arah atas. Persamaan kuadrat itu akan menjadi: $y - n = f(x - m)$ *)



Perhatikan grafik fungsi di bawah ini. Grafik fungsi tersebut menggambarkan: $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, dan $y = x^2 + 2$.

Pertama perhatikan grafik fungsi $y = x^2 + 1$, jika grafik fungsi tersebut digeser 1 satuan ke arah atas, maka berdasarkan *) menjadi

$$y - 1 = x^2 + 1 \text{ atau } y = x^2 + 2$$

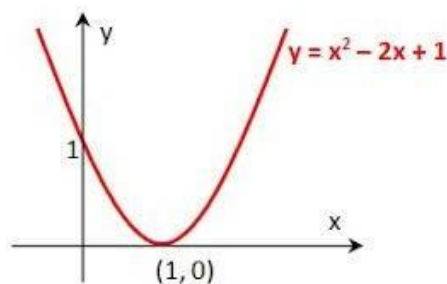
Untuk selanjutnya akan dicek juga grafik fungsi $y = x^2 + 1$, jika grafik fungsi tersebut digeser 1 satuan ke arah bawah atau dapat ditulis digeser -1, maka grafik fungsinya akan menjadi:

$$y - (-)1 = x^2 + 1 \text{ atau } y = x^2$$

Perhatikan contoh selanjutnya. Lihat kembali grafik fungsi $y = x^2$ pada gambar sebelumnya. Grafik fungsi $y = x^2$ akan digeser satu satuan ke arah kanan. Persamaan kuadrat akan menjadi:

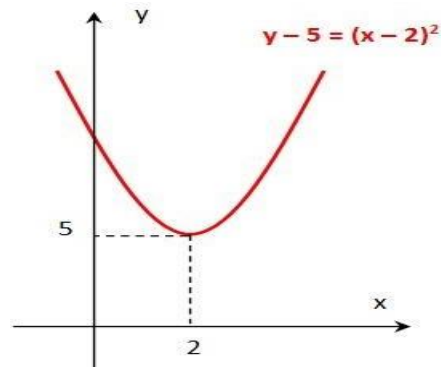
$$y - n = f(x - m),$$

$m = 1$ (karena satu satuan ke arah kanan), dan $n = 0$ (karena tidak bergeser ke arah atas atau bawah), maka persamaan kuadrat akan menjadi: $y = (x - 1)^2$ atau $y = x^2 - 2x + 1$.



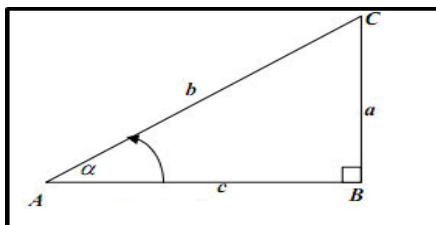
Contoh selanjutnya adalah jika fungsi kuadrat $y = x^2$ digeser 2 satuan ke kanan dan 5 satuan ke arah atas, maka akan menjadi:

$$y - 5 = (x - 2)^2, \text{ mengapa?}$$



5. Materi 5 Trigonometri

Perhatikan segitiga siku-siku berikut ini:



Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan sisi-sisi dengan aturan tertentu. Perbandingan tersebut dikenal dengan perbandingan trigonometri.

Pada bahasan ini akan dibahas tiga perbandingan trigonometri yaitu *sinus* (*sin*), *cosinus* (*cos*), dan *tangen* (*tan*). Pada gambar segitiga tersebut perhatikan bahwa sisi *b* disebut sebagai sisi miring, sisi *a* disebut sebagai sisi depan karena berada di depan sudut α , dan sisi *c* disebut sebagai sisi samping karena berada di samping sudut α . Berdasarkan gambar segitiga siku-siku tersebut maka berlaku perbandingan trigonometri sebagai berikut.

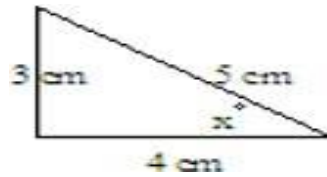
$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c}$$

Contoh:

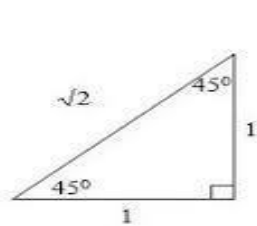
Perhatikan gambar di bawah ini! Tentukan $\sin x$, $\cos x$, dan $\tan x$!



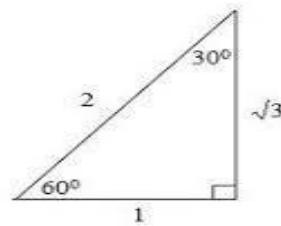
$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c} = \frac{3}{4} = 0,75$$



Gambar (1)



Gambar (2)

Perhatikan dua segitiga siku-siku istimewa berikut ini:

Gambar (1) adalah gambar segitiga siku-siku sama kaki dengan besar dua sudut selain sudut siku-siku masing-masing adalah 45^0 . Gambar (2) adalah gambar segitiga siku-siku dengan besar sudut selain sudut siku-siku adalah 30^0 dan 60^0 . Berdasarkan Gambar (1) dan Gambar (2) kita akan menentukan nilai $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$, untuk besar nilai α adalah 30^0 , 45^0 , dan 60^0 .

Perhatikan Gambar (1):

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{1} = 1$$

Perhatikan gambar (2):

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

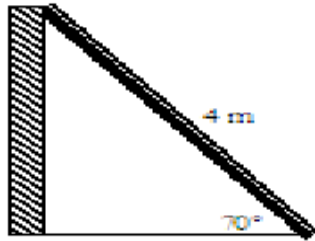
Hasil perhitungan di atas dirangkum pada Tabel berikut ini:

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tak terhitung

Contoh:

Sebuah tangga yang panjangnya 4 meter bersandar pada sebuah tembok. Tangga tersebut membentuk sudut 70° dengan lantai. Jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah ... meter.

Penyelesaian:



Berdasarkan permasalahan tersebut, dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Misalkan x adalah jarak ujung bawah tangga dengan lantai, maka:

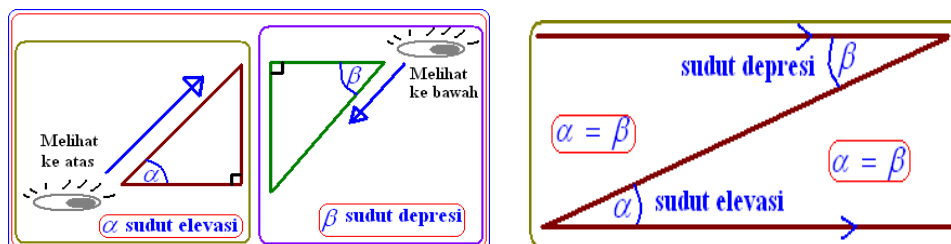
$$\cos 70^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} \text{ (mengapa kita menentukan cosinus?)}$$

$$0,342 = \frac{x}{4} \quad (\cos 70^\circ = 0,342)$$

$$x = 1,368 \text{ m}$$

Jadi jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah 1,368 meter. (Catatan: menentukan nilai sin, cos, tan dapat menggunakan bantuan kalkulator)

Memandang sebuah objek dari suatu titik tertentu bergantung dengan sudut elevasi ataupun sudut depresi. Gambar berikut ini adalah ilustrasi perbedaan sudut elevasi dan sudut depresi.

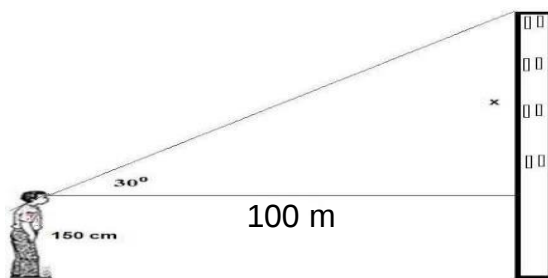


Dengan kata lain, sudut elevasi adalah sudut yang dibentuk arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas. Sudut depresi adalah sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.

Contoh:

Anton berdiri menghadap sebuah gedung dengan jarak 100 m. Anton ingin mengukur tinggi gedung tersebut dengan menggunakan klinometer dan Anton memandang puncak gedung dengan sudut elevasi sebesar 30° . Apabila tinggi Anton adalah 150 cm, maka tinggi gedung yang diukur Anton adalah ... m.

Penyelesaian:



Perhatikan ilustrasi berikut ini:

Untuk menentukan tinggi gedung, maka terlebih dahulu kita akan menentukan nilai x terlebih dahulu. Nilai x dapat ditentukan dengan mencari $\tan 30^\circ$.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{x}{100}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{x}{100}$$

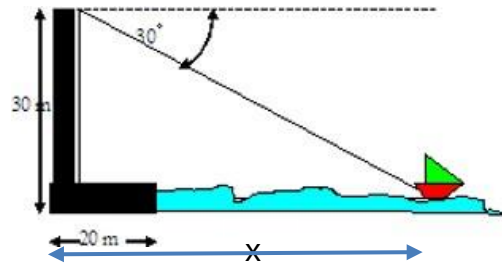
$$x = 100 \times \frac{1}{3}\sqrt{3} = 57,73 \text{ meter}$$

$$\text{Tinggi gedung} = 57,73 \text{ meter} + 1,5 \text{ meter} = 59,23 \text{ meter}$$

Contoh:

Seorang petugas pelabuhan mengamati sebuah kapal dari menara pelabuhan dengan sudut depresi 30° terhadap horizontal. Jika tinggi menara 30 meter, dan menara terletak 20 meter dari bibir pantai. Berapakah jarak kapal dari bibir pantai?

Penyelesaian:



Perhatikan gambar tersebut! Pada gambar tersebut tampak bahwa tinggi Menara adalah sisi depan, dan jarak kapal dengan menara adalah 20 meter. Misal jarak kapal terhadap menara pengamat adalah x meter.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{30}{0,577} = 51,993$$

Karena x adalah jarak kapal dengan menara pengamat, maka jarak kapal ke bibir pantai adalah $51,993 - 20 = 31,993$ meter.

D. Rangkuman

1. Logika Matematika.

- Pernyataan adalah kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran “benar” atau “salah”, tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang bersamaan.
- Operasi uner yaitu operasi negasi atau ingkaran, dimana nilai kebenaran negasi sebuah pernyataannya kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataan semula.
- Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur, yaitu meliputi operasi konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.
- Tautologi adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya benar tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya.
- Kontradiksi adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya salah tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya.
- Kontingensi adalah pernyataan yang bukan merupakan tautologi dan kontongensi.
- Pernyataan kondisional ($p \rightarrow q$), memiliki hubungan konvers ($q \rightarrow p$), invers ($\sim p \rightarrow \sim q$), dan kontrapositif ($\sim q \rightarrow \sim p$).
- Aturan penarikan kesimpulan antara lain: modus ponens, modus tolens, dan silogisme.

2. Pola Bilangan dan Deret Bilangan.

- Penalaran deduktif atau berpikir deduktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyataan yang bersifat umum.
- Penalaran induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Penalaran induktif meliputi pola, dugaan dan pembentukan generalisasi.
- Rumus pola persegi panjang adalah $U_n = n(n + 1)$, Rumus pola bilangan persegi adalah $U_n = n^2$, Rumus pola bilangan segitiga adalah $U_n = n(n + 1)$.
- Sebuah barisan dinamakan barisan aritmatika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.

- e. Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah: $U_n = a + (n - 1) b$, dan jumlah suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah: $s_n = \frac{1}{2}n(a + u_n)$
- f. Suatu barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika hasil bagi setiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap.
- g. Rumus suku ke- n dari suatu barisan geometri adalah: $U_n = a \times r^{n-1}$, dan jumlah suku ke- n dari suatu barisan geometri adalah: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{r-1}$, $r \neq 1$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, $r > 1$.

3. Persamaan linear, Pertidaksamaan Linear dan Grafik Fungsi Linear.

- a. Persamaan linier adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertinggiya satu yang dihubungkan dengan tanda “=”.
- b. Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah: $ax + b = c$, $a \neq 0$.
- c. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah: $ax + by = c$, dengan a dan $b \neq 0$.
- d. Menentukan himpunan penyelesaian persamaan linear dua variabel dapat menggunakan metode eliminasi atau metode substitusi.
- e. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertinggiya satu yang dihubungkan dengan tanda “ $\neq$ ”, atau “ $<$ ”, atau “ $>$ ”, atau “ $\leq$ ”, atau “ $\geq$ ”.
- f. Persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- g. Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, yaitu $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
- h. Misalkan terdapat suatu garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka kemiringan garis itu adalah $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- i. Dua garis dikatakan sejajar jika gradien (kemiringan) kedua garis tersebut sama, dapat ditulis $m_1 = m_2$.
- j. Dua garis dikatakan tegak lurus jika perkalian dua gradien sama dengan -1 , dapat ditulis $m_1 \cdot m_2 = -1$.

4. Persamaan kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat dan Grafik Fungsi Kuadrat.

1. Persamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertinggiya dua yang dihubungkan dengan tanda “=”.
- a. Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertinggiya dua yang dihubungkan dengan tanda “<”, “>”, “≤”, atau “≥”.
- b. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah: $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$. Untuk menentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran, melengkapkan kuadrat, ataupun rumus kuadratis.
- c. Menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan cara menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y , menentukan persamaan sumbu simetri dan menentukan koordinat titik balik.

5. Trigonometri

- a. Perbandingan trigonometri merupakan perbandingan yang berlaku pada segitiga siku-siku. Perbandingan trigonometri yang dikenal antara lain:
- b. $\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b}$, $\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b}$
- c. $\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c}$ atau $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- d. sudut elevasi adalah sudut yang dibentuk arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas. Sudut depresi adalah sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.