Pembelajaran 1. Bilangan Asli, cacah, dan Bulat (ACB)

Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi bilangan, bilangan bulat, FPB dan KPK.
2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait materi bilangan, bilangan bulat, FPB dan KPK..

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan bulat.
2. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep operasi hitung pada bilangan ACB.
3. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep faktor, FPB dan KPK.

C. Uraian Materi

Materi pada pembelajaran 1 terdiri dari .. materi, yaitu: bilangan, bilangan bulat dan operasi hitung pada bilangan bulat, serta FPB dan KPK.

1. Materi 1 Bilangan

Materi 1 bilangan membahas tentang konsep bilangan dan macam-macam bilangan,

a. Konsep Bilangan

Bilangan adalah suatu unsur atau objek yang tidak didefinisikan (*underfined term*). Bilangan merupakan suatu konsep yang abstrak, bukan simbol, bukan pula angka. Bilangan menyatakan suatu nilai yang bisa diartikan sebagai banyaknya atau urutan sesuatu atau bagian dari suatu keseluruhan. Bilangan merupakan konsep yang abstrak, bukan simbol, dan bukan angka. Tanda-tanda yang sering ditemukan bukan suatu bilangan tetapi merupakan lambang bilangan. Lambang bilangan memuat angka dengan nilai tempat tertentu.

b. Macam-Macam Bilangan

Macam-macam bilangan antara lain adalah sebagai berikut.

1) Bilangan kardinal

   Bilangan kardinal menyatakan hasil membilang (berkaitan dengan pertanyaan berapa banyak). Bilangan kardinal juga digunakan untuk menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan. Contoh: ibu membeli 3 keranjang buah-buahan.

2) Bilangan ordinal

   Bilangan ordinal menyatakan urutan dari suatu objek. Contoh: mobil yang ke-3 di halaman itu berwarna hitam.

3) Bilangan asli

   Bilangan asli juga disebut dengan Natural Numbers. Himpunan bilangan asli = {1, 2, 3, 4,...}. Bilangan asli dapat digolongkan menurut faktornya yaitu: bilangan genap, bilangan ganjil, dan bilangan prima.

4) Bilangan komposit

   Bilangan komposit adalah bilangan asli yang memiliki lebih dari 2 faktor. Suatu bilangan bulat positif dinamakan bilangan komposit jika bilangan itu mempunyai pembagi lain kecuali bilangan itu sendiri dan 1. Himpunan bilangan komposit = {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14,...}

5) Bilangan cacah

   Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan kardinalitas suatu himpunan.

Himpunan bilangan cacah = {0, 1, 2, 3,...}.

6) Bilangan sempurna

Bilangan sempurna adalah bilangan asli yang jumlah faktornya (kecuali faktor yang sama dengan dirinya) sama dengan bilangan tersebut. Perhatikan contoh berikut:

- 6 merupakan bilangan sempurna, karena faktor dari 6 kecuali dirinya sendiri adalah 1, 2, dan 3. Jadi, 1 + 2 + 3 = 6.
- 28 merupakan bilangan sempurna, karena faktor dari 28 kecuali dirinya sendiri adalah 1, 2, 4, 7, dan 14. Jadi, 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

7) Bilangan bulat

Himpunan yang merupakan gabungan dari himpunan bilangan asli dengan lawannya dan juga bilangan nol disebut himpunan bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}.

8) Bilangan rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, , dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$ (setelah disederhanakan, a dan b tidak memiliki faktor sekutu kecuali 1).

9) Bilangan irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan-bilangan bulat a dan b, dengan $b \neq 0$. Bilangan irasional bukan merupakan bilangan bulat dan juga bukan merupakan bilangan pecahan. Jika bilangan irasional ditulis dalam bentuk desimal, bilangan itu tidak mempunyai pola yang teratur.

10) Bilangan real

Bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dengan bilangan irasional. Bilangan real dapat dinyatakan dengan lambang $\mathbb{R}$.

11) Bilangan kompleks

Himpunan bilangan kompleks dapat didefinisikan sebagai pasangan terurut (a, b) dengan $a, b \in \mathbb{R}$ atau $K = \{z | z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Bentuk umum bilangan kompleks adalah $a + bi$.

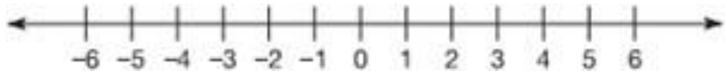
2. Materi 2 Bilangan Bulat dan Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

Pada materi 2 ini membahas tentang: pengertian bilangan bulat, konsep nilai tempat dan contoh penerapannya pada pembelajaran, serta operasi hitung pada bilangan bulat.

a. Pengertian Bilangan Bulat

Pada bagian sebelumnya telah sedikit disinggung tentang definisi bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat terdiri dari gabungan bilangan asli, bilangan nol, dan lawan dari bilangan asli. Bilangan asli tersebut dapat disebut juga bilangan bulat positif. Lawan dari bilangan asli tersebut dapat disebut bilangan bulat negatif.

Himpunan bilangan bulat dapat dituliskan sebagai berikut: Z = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}. Jika digambarkan dalam garis bilangan, himpunan bilangan bulat adalah sebagai berikut:



Gambar 1 Garis bilangan himpunan bilangan bulat

Dari gambar 1, dalam garis bilangan tersebut terdiri dari:

- Himpunan bilangan bulat positif: {1, 2, 3, … }
- Himpunan Bilangan nol: { 0 }, dan
- Bilangan bulat negatif: {…, -4, -3, -2, -1}

Setelah mengetahui tentang pengertian bilangan bulat, maka tahap selanjutnya adalah akan mempelajari bagaimana nilai tempat bilangan dan operasi hitung pada bilangan bulat, termasuk di dalamnya penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bilangan bulat.

b. Konsep Nilai Tempat dan Contoh Penerapan Pada Pembelajaran

Nilai tempat merupakan nilai yang diberikan untuk sebuah angka berdasarkan letak angka tersebut. Bilangan 1.234, kita akan menentukan nilai tempat dari masing-masing angka tersebut. Kita tahu bahwa 1.234 dapat ditulis menjadi bentuk penjumlahan seperti berikut ini.

$1.234 = 1.000 + 200 + 30 + 4$ **atau** $1.234 = 1_{\text{ribuan}} + 2_{\text{ratusan}} + 3_{\text{puluhan}} + 4_{\text{satuan}}$

Dari bentuk penjumlahan tersebut, maka angka 1 memiliki nilai tempat ribuan, angka 2 memiliki nilai tempat ratusan, angka 3 memiliki nilai tempat puluhan, dan angka 4 memiliki nilai tempat satuan. Contoh yang lain adalah kita akan menentukan nilai tempat dari 35.034. Apabila kita perhatikan pada bilangan tersebut terdapat 2 angka 3 yang tentunya memiliki nilai tempat yang berbeda. Seperti pada contoh sebelumnya, 35.034 juga dapat kita tulis menjadi bentuk penjumlahan seperti ini.

35.034 = 30.000 + 5. 000 + 0 + 30 + 4,

Dari bentuk tersebut, maka angka 3 yang pertama memiliki nilai tempat puluhan ribu, 5 memiliki nilai tempat ribuan, 0 memiliki nilai tempat ratusan, 3 yang kedua memiliki nilai tepat puluhan dan 4 memiliki nilai tempat satuan. Berdasarkan kedua contoh tersebut, misalkan kita memiliki bilangan $abc.def$ maka untuk menentukan nilai tempat dari bilangan tersebut, dapat dirubah menjadi bentuk:

$abc.def$ = 100.000a + 10.000b + 1000c + 100d + 10e + f,

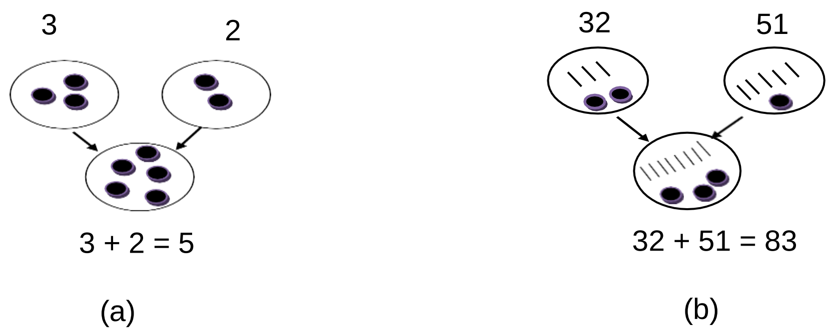
dengan kata lain nilai tempat a adalah ratus ribuan, nilai tempat b adalah puluh ribuan, nilai tempat c adalah ribuan, nilai tempat d adalah ratusan, nilai tempat e adalah puluhan dan nilai tempat f adalah satuan.

c. Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

Operasi hitung pada bilangan bulat akan dijabarkan sebagai berikut.

1) Penjumlahan Bilangan Bulat

Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini.



Gambar 2 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat

Pada gambar 2 (a) yang mengilustrasikan operasi penjumlahan 3 + 2, berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa pada satu himpunan terdapat 3 anggota dan himpunan yang lain terdapat 2 anggota, sehingga gabungan dari dua himpunan tersebut adalah 5 anggota.

Pada Gambar 2 (b) mengilustrasikan 32 + 51, dimana nilai tempat puluhan diwakili oleh stik dan nilai tempat satuan diwakili oleh koin hitam. Pada ilustrasi tersebut memperlihatkan bahwa untuk menjumlahkan, maka jumlahkanlah sesuai dengan nilai tempat yang sama, yaitu nilai tempat puluhan dengan puluhan (30 + 50) dan nilai tempat satuan dengan nilai tempat satuan (2 + 1), sehingga hasil akhirnya adalah 83.

Berdasarkan ilustrasi tersebut, jika $\boldsymbol{a}$ **dan** $\boldsymbol{b}$ **adalah bilangan bulat positif, maka jumlah dari kedua bilangan akan dilambangkan** $\boldsymbol{a+b}$. Gabungan dari himpunan a dan b diperoleh dengan menentukan cacah atau banyaknya gabungan himpunan dari a dan b, dengan catatan kedua himpunan tidak memiliki persekutuan.

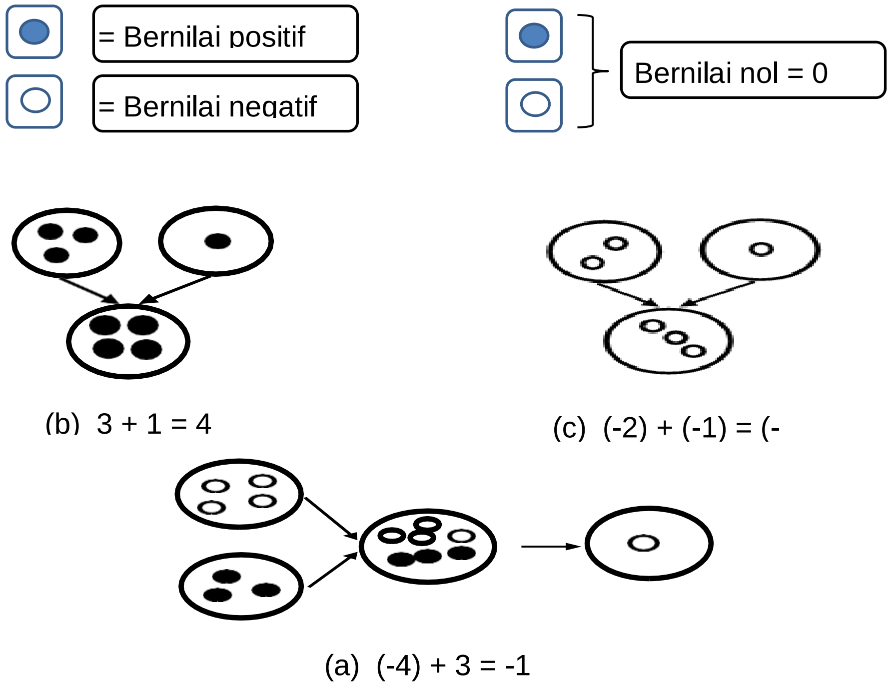
a) Media benda konkret

Perhatikan Gambar 3 yang mengilustrasikan penjumlahan bilangan bulat positif dengan positif, penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif, dan penjumlahan bilangan positif dengan bilangan bulat negatif dengan menggunakan media konkret. Media konkret yang digunakan adalah gambar koin berwarna hitam dan putih. Dari gambar 3 tersebut, dapat ditunjukkan atau digambarkan sebagai berikut.

(1) Gambar 3 (a) mengilustrasikan 3 koin hitam digabungkan dengan 1 koin hitam sehingga menjadi 4 koin hitam, atau 3 + 1 = 4.

(2) Gambar 3 (b) mengilustrasikan 2 koin putih akan digabungan dengan 1 koin putih sehingga menjadi 3 koin merah, atau (-2) + (-1) = (-3).

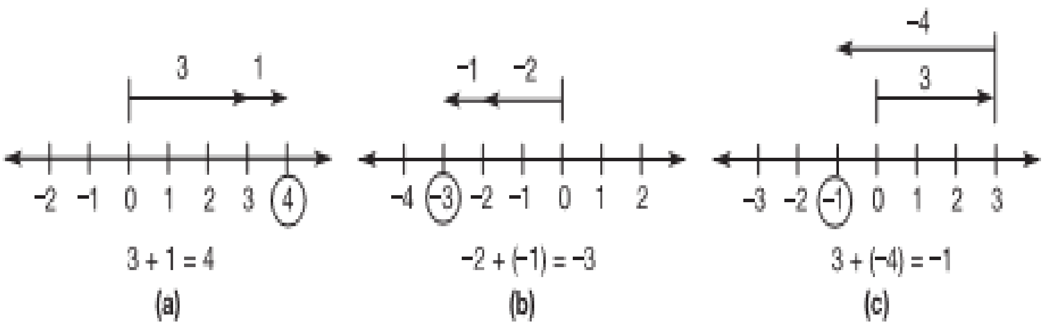
(3) Gambar 3 (c) mengilustrasikan 4 koin putih digabungkan dengan 3 koin hitam (ketentuan menyebutkan bahwa pada saat koin berbeda warna digabungkan akan bernilai 0), sehingga hanya menyisakan 1 koin putih, atau (-4) + 3 = -1.



Gambar 3 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat Positif dengan Positif, Negatif dengan Negatif dan Positif dengan Negatif

(4) Garis bilangan

Pada penjumlahan bilangan bulat dapat diilustrasikan sebagai perpindahan sepanjang garis bilangan. Suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri. Operasi hitung penjumlahan diilustrasikan dengan langkah maju dan operasi hitung pengurangan diilustrasikan dengan langkah mundur. Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini.



Gambar 4 Ilustrasi penjumlahan bilangan menggunakan garis bilangan

(1) Gambar 4 (a) mengilustrasikan 3 + 1, maka dari titik 0 akan bergerak ke arah kanan 3 langkah, kemudian bergerak maju tetap ke arah kanan 1 langkah, sehingga akan berakhir di titik 4, atau 3 + 1 = 4.

(2) Gambar 4 (b) untuk mengilustrasikan (-2) + (-1), dari titik 0 akan bergerak maju ke arah kiri 2 langkah, kemudian bergerak maju lagi (tetap ke arah kiri) 1 langkah, sehingga akan berakhir di titik -3, atau (-2) + (-1) = -3.

(3) Gambar 4 (c) untuk mengilustrasikan 3 + (-4), dari titik 0 bergerak maju ke arah kanan 3 langkah kemudian bergerak maju ke arah kiri (berbalik arah) sebanyak 4 langkah, sehingga akan berakhir di titik -1, atau 3 + (-4) = -1.

Adapun, beberapa sifat penjumlahan bilangan bulat diantaranya:

(1) Sifat Tertutup

Jika $a\ dan\ b$ anggota himpunan bilangan bulat, maka $a + b$ juga anggota himpunan bilangan bulat. Contoh: 2 + 3 = 5, dimana 2,3, dan 4 adalah anggota bilangan bulat Z = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}.

(2) Sifat Pertukaran (Komutatif)

Jika $a\ dan\ b$ anggota bilangan bulat maka $a + b = b + a$. $\text{Contoh: } 2 + 3 = 5$ $\text{dan } 3 + 2 = 5, \text{ jadi } 2 + 3 + 3 + 2$

(3) Sifat Pengelompokan (Asosiatif)

Jika a, $b\ dan\ c$ anggota bilangan bulat, maka: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Contoh: 2 + (3 + 4) = 9 dan (2 + 3) + 4 = 9, jadi 2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4

(4) Memiliki unsur identitas

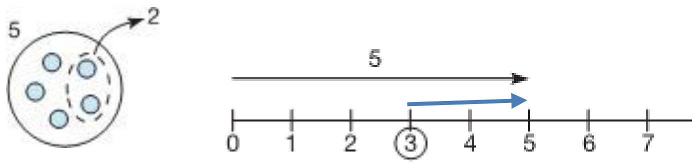
Ada bilangan 0 sedemikian sehingga a + 0 = 0 + a, untuk semua a anggota bilangan bulat. Contoh 2 + 0 = 2 dan 0 + 2 = 2, jadi 2 + 0 = 0 + 2.

(5) Memiliki invers terhadap penjumlahan

Untuk setiap bilangan bulat a, terdapat bilangan bulat (− a) sedemikian sehingga a + (- a) = (-a) + a = 0. Contoh: 2 + (-2) = 0 dan (-2) + 2 = 0, jadi 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0.

2) Pengurangan Bilangan Bulat

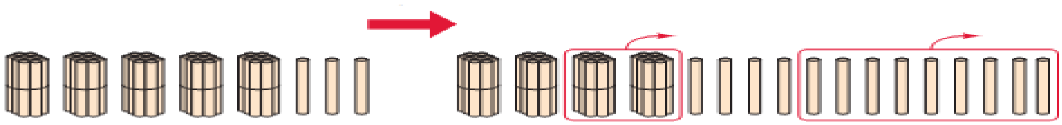
Operasi hitung pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan. Jika sebuah bilangan bulat positif a dikurangi dengan bilangan bulat positif b menghasilkan bilangan bulat positif c atau $(a - b = c)$ operasi penjumlahan yang terkait adalah $b + c = a$. Untuk menjelaskan operasi hitung pengurangan, perhatikan ilustrasi Gambar 1.8 berikut ini.



Gambar 5 Ilustrasi pengurangan bilangan bulat positif

Gambar 5, mengilustrasikan 5 – 2 = 3. Dengan menggunakan garis bilangan (perlu diperhatikan aturan yang telah disepakati pada operasi hitung penjumlahan) berlaku, suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri, dan operasi hitung pengurangan diilustrasikan dengan langkah mundur. Untuk mengilustrasikan 5 – 2, dari titik 0, bergerak maju sebanyak 5 langkah ke titik 5, kemudian mundur 2 langkah, sehingga berakhir di titik 3, atau 5 – 2 = 3.

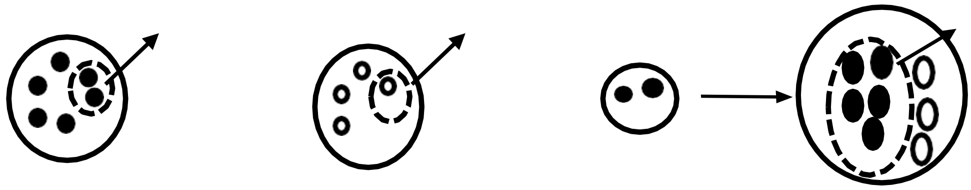
Untuk operasi hitung pengurangan melibatkan nilai tempat puluhan, perhatikan ilustrasi gambar berikut ini:



Gambar 6 Ilustrasi pengurangan bilangan melibatkan nilai tempat

Gambar 6 di atas mengilustrasikan pengurangan 53 – 29. Satu ikat lidi yang terdiri dari 10 lidi melambangkan nilai tempat puluhan, dan satu lidi melambangkan nilai tempat satuan. Untuk mengilustrasikan 53 – 29, maka terdapat 5 ikat lidi puluhan dan 3 lidi satuan, dari kumpulan lidi tersebut akan diminta 2 ikat lidi puluhan dan 9 lidi satuan. Untuk memudahkan, 1 ikat lidi satuan akan dipecah menjadi 10 lidi satuan, sehingga menjadi 4 ikat lidi puluhan dan 13 lidi satuan. Setelah diminta maka akan tersisa 2 ikat lidi puluhan dan 4 lidi satuan atau 53 – 29 = 24.

Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif diilustrasikan pada gambar 8 berikut ini.



(a) 6 – 2 = 4 (b) (-4) – (-1) = -3 (c) 6 – 2 = 4

Gambar 7 Ilustrasi pengurangan bilangan bulat

Pada Gambar 7 di atas, bilangan bulat positif diwakilkan oleh koin berwarna hitam, dan bilangan negatif diwakilkan oleh koin berwarna putih. Gambar 7 (a) mengilustrasikan terdapat 6 koin hitam kemudian akan diambil 2 koin hitam, sehingga sisanya adalah 4 koin hitam, atau 6 – 2 = 4. Gambar 7 (b) mengilustrasikan terdapat 4 koin putih kemudian akan diambil 1 koin putih, sehingga sisanya adalah 3 koin putih, atau (-4) – (-1) = (-3). Gambar 7 (c) mengilustrasikan terdapat 2 koin hitam, tetapi akan diambil 5 koin hitam. Karena koin hitam tidak mencukupi maka akan disediakan lagi 3 koin hitam, dan agar bernilai netral maka juga disediakan 3 koin putih, sehingga sisa koinnya adalah 3 koin merah, atau 2 – 5 = -3.

Dari contoh di atas, dapat disimpulan bahwa: $\boldsymbol{a}$ **-** $\boldsymbol{b}$ **=** $\boldsymbol{a} + $ **(-b) dan a – (-b) = a + b.** Jadi, pada operasi hitung pengurangan berlaku definisi, misalkan $a\ dan$ b bilangan bulat, maka $a - b$ adalah sebuah bilangan bulat c yang bersifat $b + c = a$. Dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{a - b}$ **= c jika dan hanya jika** $\boldsymbol{a = b}$ **+ c. Jika** $\boldsymbol{a\ dan}$ $\boldsymbol{b}$ **bilangan bulat**, maka $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$**.**

Jika pada operasi hitung penjumlahan berlaku sifat komutatif, asosiatif, memiliki unsur identitas dan memiliki unsur invers, menurut Anda apakah pada operasi hitung pengurangan memiliki sifat yang sama? Jika tidak mengapa?

Sebagai ilustrasi pada sifat komutatif atau sifat pertukaran, jika pada operasi hitung pengurangan pada bilangan bulat berlaku sifat tersebut, maka haruslah berlaku a – b = b – a. Dengan menggunakan contoh penyangkalan 5 – 3= 2, dan 3 – 5= -2, hal tersebut menunjukkan bahwa **pada operasi pengurangan tidak**

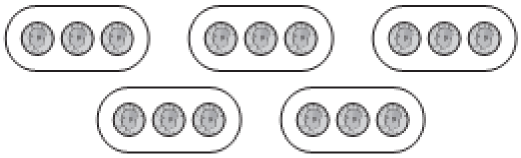
berlaku sifat komutatif.

Untuk sifat yang lain silahkan dianalisis apakah berlaku atau tidak.

3) Perkalian Bilangan Bulat

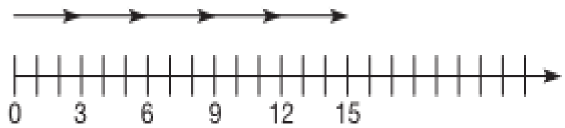
Pada hakikatnya perkalian pada dua buah bilangan bulat positif adalah penjumlahan yang berulang. Salah satu kasus sederhana yaitu, terdapat lima buah keranjang, dimana setiap keranjang terdapat 3 butir telur. Berapa banyak telur seluruhnya?

Permasalahan tersebut dapat diilustrasikan seperti gambar di bawah ini.



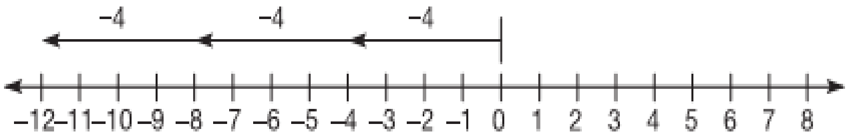
Gambar 8 Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan himpunan

Berdasarkan gambar 8 di atas, jumlah seluruh telur adalah 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15, atau terdapat 5 kelompok dengan anggota masing-masing 3 dilambangkan dengan 5 x 3 = 15. Secara sederhana, dapat juga diilustrasikan pada garis bilangan seperti berikut ini.



Gambar 9 Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan garis bilangan

Gambar 9 di atas, menggambarkan 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 atau 5 x 3 = 15. Berikutnya, perhatikan ilustrasi garis bilangan berikut ini.



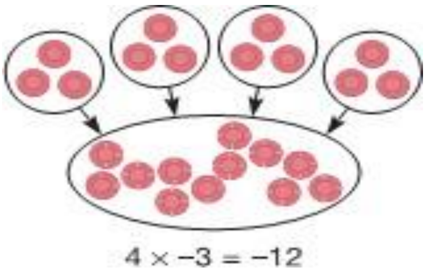
Gambar 10 Ilustrasi Perkalian Bilangan Bulat Negatif
Menggunakan Garis Bilangan

Garis bilangan pada gambar 10 tersebut menyatakan:

(-4) + (-4) + (-4) = 3 x (-4) = -12.

Contoh yang lain adalah menggunakan koin muatan, dimana koin berwarna merah memiliki nilai negatif. Pada setiap kelompok terdapat 3 koin merah (3 koin bernilai negatif), dan terdapat 4 kelompok.

Secara matematis ditulis (-3) +(-3) + (-3) +(-3) = 4 x (-3) = -12.



Gambar 11 Ilustrasi perkalian bilangan bulat negatif menggunakan himpunan

Beberapa contoh sebelumnya adalah perkalian dua bilangan bulat positif dan perkalian bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bagaimana untuk perkalian bilangan bulat negatif dan bilangan bulat negatif?

Perhatikan pola perkalian bilangan berikut ini.

(–3) × 3 = – 9
(–3) × 2 = – 6 +3
(–3) × 1 = – 6 +3
(–3) × 0 = 0 +3
(–3) × (– 1) = ? +3
(–3) × (– 2) = ? +3
(–3) × (– 3) = ? +3

Jika diperhatikan pola tersebut (pada bagian hasil) semakin bertambah 3, sehingga (-3) x (-1) = 3, (-3) x (-2) = 6, (-3) x (-3) = 9.

Coba Anda buat contoh lain dengan bilangan yang berbeda! Simpulan apa yang Anda dapatkan? Dari beberapa contoh tersebut dan contoh lain yang Anda buat, diperoleh sebuah aturan sebagai berikut.

(1) $-a \ x \ b = -(a \ x \ b)$ atau (-) × (+) = (-), bilangan negatif × bilangan positif hasilnya bilangan negatif.

(2) $a \ x$ -$b = -(a \ x \ b)$ atau (+) × (-) = (-), bilangan positif × bilangan negatif hasilnya bilangan negatif.

(3) $a \ x \ b = (a \ x \ b)$ atau (+) × (+) = (+), bilangan positif × bilangan positif hasilnya bilangan positif.

(4) $-a \ x \ -b = (a \ x \ b)$ atau (-) × (-) = (+), bilangan negatif × bilangan negatif hasilnya bilangan positif.

Adapun beberapa sifat perkalian bilangan bulat adalah sebagai berikut:

a) Sifat Tertutup

Jika a dan b anggota himpunan bilangan bulat, maka $a \ x \ b$ juga anggota himpunan bilangan bulat. Bentuk umum $a \ x \ b$ dapat dinyatakan dengan ab.

b) Sifat Komutatif

Jika $a \ dan \ b$ anggota bilangan bulat maka $ab = ba$

c) Sifat Asosiatif

Jika a, b dan c anggota bilangan bulat, maka $(ab)x \ c = a \ x \ (bc)$

d) Sifat Distributif

Jika a, b, c anggota himpunan bilangan bulat, maka a(b+c) = ab+ac

e) Memiliki Unsur Identitas

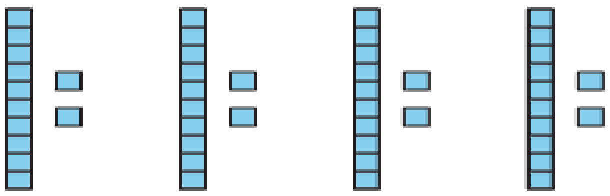
Ada bilangan 1 sedemikian sehingga a × 1 = 1 × a untuk semua a anggota bilangan bulat.

4) Pembagian Bilangan Bulat

Pada hakikatnya operasi hitung pembagian pada dua buah bilangan bulat positif adalah pengurangan yang berulang sampai nol. Definisi ini hanya berlaku saat bilangan yang dibagi habis dibagi oleh bilangan pembagi. Perhatikan contoh kasus berikut ini.

Berapakah 48 : 4?

Perhatikan ilustrasi penyelesaian berikut ini:



Gambar 12 Ilustrasi pembagian 48 : 4

Gambar 12 tersebut mengilustrasikan 48 memiliki nilai tempat puluhan 4 dan nilai satuan 8. Karena akan dibagi pada 4 kelompok, maka setiap kelompok memiliki 1 puluhan, dan 2 satuan, atau dengan kata lain 48 : 4 = 12.

Definisi:

Untuk setiap a dan b anggota bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ sedemikian sehingga $a = bc$.

Jika pada operasi hitung perkalian berlaku sifat komutatif, asosiatif, distributif, dan memiliki unsur identitas, menurut Anda apakah pada operasi hitung pembagian memiliki sifat yang sama? Jika tidak mengapa?

3. Materi 3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Sebelum dibahas tentang FPB dan KPK terlebih dahulu akan dibahas tentang bilangan prima, faktor prima, dan faktorisasi prima.

a. Bilangan prima, Fartor Prima, dan Faktorisasi Prima

Pada bagian ini akan dibahas tentang bilangan prima, fartor prima, dan faktorisasi prima dan contoh-contohnya.

1) Bilangan Prima

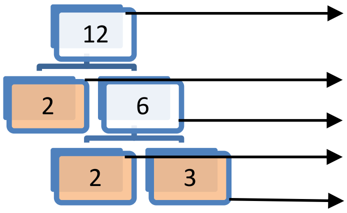
Bilangan prima adalah bilangan asli lebih dari 1 yang hanya atau tepat memiliki 2 faktor yaitu bilangan itu sendiri dan 1. Contoh: banyak bilangan prima yang kurang dari 100 yang disusun berurutan mulai dari bilangan yang terkecil adalah: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, dan 97. Ada 25 bilangan prima yang kurang dari 100.

2) Faktor prima

Faktor prima suatu bilangan adalah faktor-faktor dari bilangan tersebut yang merupakan bilangan prima, Sebagai contoh, faktor dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Dari faktor-foktor tersebut yang merupakan bilangan prima adalah 2 dan

3. Dengan demikian Faktor prima dari 12 adalah 2 dan 3.

Bagai mana cara menentukan faktor prima suatu bilangan? Untuk menentukan faktor prima atau faktorisasi prima suatu bilangan dapat menggunakan “pohon faktor”. Contoh langkah-langkah menentukan faktor prima dari 12 seperti tersebut di atas, dapat dilakukan dengan membuat pohon faktor seperti berikut ini.



12 ilangan yang dicari faktornya

2 faktor prima terkecil dari 12

6 hasil dari 12:2

2 faktor prima terkecil dari 6

3 hasil dari 6: 2 =3, karena 3 bilangan prima maka langkahnya berhenti kalau bukan bilangan prima maka langkah bisa dilanjutkan.

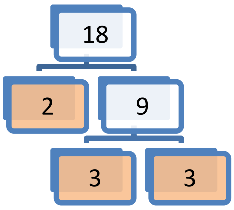
Jadi faktor prima dari 12 adalah 2 dan 3

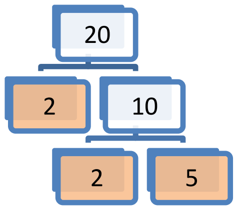
Gambar 13 Langkah-langkah Menentukan Faktor Prima dari suatu Bilangan

3) Faktorisasi Prima

Faktorisasi Prima adalah menguraikan bilangan menjadi perkalian faktor-faktor primanya. Faktor prima dari bilangan 12 adalah 2 dan 3. Dengan demikian bilangan 12 dapat diuraikan menjadi perkalian dari faktor-faktor primanya yaitu $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$. Untuk menentukan faktorisasi prima dari suatu bilangan dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan pohon faktor seperi uraian sebelumnya.

Contoh menentukan faktor prima dari 18 dan 20 dengan pohon faktor adalah sebagai berikut.





Faktorisasi prima dari 18 adalah:
$2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

Faktorisasi prima dari 20 adalah:
$2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

Gambar 14 Langkah-langkah Menentukan Faktorisasi Prima dari suatu Bilangan

b. Faktor Persekutuan Terbesar

Bilangan bulat a ($a \neq 0$) merupakan faktor dari suatu bilangan bulat b sedemikian sehingga $b = ac$. Bilangan bulat positif a merupakan pembagi bilangan bulat positif b dan c, maka a disebut pembagi persekutuan b dan c.

Definisi:

Misalkan a dan b bilangan bulat, faktor persekutuan terbesar dari a dan b, FPB (a, b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi: d|a dan d|b.

FPB dari dua bilangan positif adalah bilangan bulat terbesar yang membagi keduanya. Dinyatakan dengan a = FPB (a, b).

Untuk menentukan FPB (a, b) dapat melalui metode irisan himpunan, metode faktorisasi prima, dan metode algoritma pembagian.

1) Metode Irisan Himpunan

Metode irisan himpunan dapat dilakukan dengan mendaftar semua bilangan dari himpunan faktor (pembagi positif) dari dua bilangan, kemudian tentukan himpunan sekutunya.

Contoh: tentukan FPB dari 16 dan 24

Faktor 16 = {1, 2, 4, 8, 16}.
Faktor 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.
Faktor dari 16 dan 24 adalah {1, 2, 4, 8}.
FPB dari 16 dan 24 adalah 8

2) Metode Faktorisasi Prima

Untuk beberapa kasus, metode irisan himpunan memiliki kekurangan dari segi waktu. Metode tersebut akan memerlukan waktu yang lama jika bilangan-bilangannya memiliki banyak faktor. Metode faktorisasi prima dapat dilakukan dengan cara menentukan faktorisasi prima dari dua atau lebih bilangan, lalu tentukan faktor sekutu prima, **FPB dari dua bilangan atau lebih adalah hasil kali faktor-faktor sekutu, dimana yang dipilih adalah bilangan dengan**

pangkat terendah antara hasil faktorisasi prima dari bilangan-bilangan tersebut.

Contoh 1:

Tentukan FPB dari 300 dan 378

$$\left.\begin{array}{l} 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ 378 = 2 \times 3^2 \times 7 \end{array}\right\} \text{Diambil faktor yang sama dengan pangkat terendah}$$

Faktor sekutu prima dari faktorisasi prima tersebut adalah 2 dan 3. FPB dari 300 dan 378 adalah 2 × 3 = 6

Contoh 2

Tini berencana menghias pigura produksi miliknya dengan manik- manik. Setelah dikumpulkan ternyata Tini memiliki 96 manik-manik kuning, 120 manik-manik merah, 108 manik-manik ungu, dan 72 manik-manik biru. Berapakah pigura yang dapat diproduksi oleh Tini dengan banyak manik-manik dan warna yang sama?

Solusi dari pernyataan tersebut adalah kita akan mencari FPB dari 96, 120, 108, 72 atau FPB (96, 120, 108, 72) mengapa FPB? Karena Tini akan membagi manik-maniknya untuk setiap pigura.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Faktorisasi prima dari 96} = 2^5 \times 3 \\ \text{Faktorisasi prima dari 120} = 2^3 \times 3 \times 5 \\ \text{Faktorisasi prima dari 108} = 2^2 \times 3^3 \\ \text{Faktorisasi prima dari 72} = 2^3 \times 3^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Diambil faktor yang sama} \\ \text{dengan pangkat terendah}\end{array}$$

Karena FPB (96, 120, 108, 72) adalah: $2^2 \times 3 = 12$, maka pigura yang dapat diproduksi oleh Tini ada 12 dengan setiap pigura akan dihias oleh 8 manik-manik kuning, 10 manik-manik merah, 9 manik-manik ungu dan 6 manik-manik biru.

3) Metode Algoritma Pembagian

Menurut algoritma pembagian, bilangan positif $a\ dan\ b$, $a \geq b$, dapat ditulis dengan $a = bq + r$, dimana q bilangan bulat positif dan r bilangan cacah.

Contoh: Tentukan FPB dari 378 dan 300 Menurut algoritma pembagian:

378 = 1 x 300 + 78, dan 0≤ 78 ≤ 300

Hal ini berarti pembagi 378 dan 300 juga membagi 78. Jadi, FPB (378, 300) = FPB (300, 78)

Gunakan algoritma pembagian lagi:

300 = 3 x 78 + 66, 0≤ 66 ≤78, FPB {300,78} = FPB {78,66}

78 = 1 x 66 +12, 0≤ 12 ≤ 66, FPB {78,66} = FPB {66,12}

66 = 5 x 12 + 6, 0≤ 6 ≤ 12, FPB {66,12} = FPB {12,6}

12 = 2 x 6 + 0. FPB {12,6} = 6

Jadi FPB {378 dan 300} = 6

Contoh:

Bu guru memiliki 105 buah pisang, 75 buah kelengkeng, dan 30 buah jeruk. Buah-buahan tersebut akan dibagikan secara merata untuk murid-muridnya. Berapakah jumlah masing-masing buah yang diterima oleh setiap murid?

Solusi dari pertanyaan tersebut adalah kita akan mencari FPB dari bilangan-bilangan tersebut.

FPB dari 105, 75, dan 30 adalah 15 (Mengapa?)

Maka banyak murid yang mendapatkan buah-buahan tersebut ada 15 orang.

Jadi, setiap anak akan mendapatkan 7 buah pisang, 5 buah kelengkeng, dan 2 buah jeruk.

c. Kelipatan Persekutuan Terkecil

Suatu bilangan bulat c disebut kelipatan persekutuan dari bilangan bulat tak nol a dan b jika a|c dan b|c. Himpunan kelipatan persekutuan dari a dan b merupakan sebuah bilangan bulat terkecil, yang ditulis KPK (a, b).

Definisi:

Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan tidak nol $a\ dan\ b$, KPK (a, b) adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi a|m dan b|m.

KPK (a, b) = $\frac{\text{axb}}{FPB\{a,b\}}$

Seperti halnya FPB, untuk menentukan KPK juga dapat dilakukan dengan metode irisan himpunan dan metode faktorisasi prima.

1) Metode Irisan Himpunan

Untuk menentukan KPK melalui metode irisan himpunan, sebelumnya dapat ditentukan terlebih dahulu kelipatan-kelipatan positif dari bilangan- bilangan, kemudian tentukan himpunan persekutuan dari kelipatan bilangan- bilangan itu, dan tentukan yang terkecil.

Contoh:

Tentukan KPK dari 12, 15, dan 20

Kelipatan 12 = {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...}

Kelipatan 15 = {15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, ...}

Kelipatan 20 = {20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...}

Kelipatan persekutuan dari 12, 15, 20 = {60, 120, ...}

KPK dari 12,15,20 = 60

2) Metode Faktorisasi Prima

Seperti halnya FPB, metode faktorisasi prima juga dapat digunakan untuk menentukan KPK. Perbedaannya adalah saat **menentukan KPK pilih bilangan dengan pangkat tertinggi antara hasil faktorisasi prima dari bilangan-bilangan tersebut.**

Contoh 1:

Tentukan KPK dari 12, 15, dan 20

$12 = 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$20 = 2^2 \times 5$

Diambil faktor yang sama dengan pangkat tertinggi
dan faktor yang tidak sama ikut dikalikan

Faktor sekutu prima dari faktorisasi prima tersebut adalah 2 dan 3. KPK dari 12, 15, dan 20 adalah $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Contoh 2

Rosi mengikuti les Matematika setiap 3 hari sekali Arsya mengikuti les matematika setiap 4 hari sekali, dan Pinka setiap 6 hari. Mereka bertiga berlatih bersama yang kedua tanggal 5 Februari 2021. Kapan mereka bertiga berlatih bersama pada tanggal untuk pertama kalinya?

Dalam menyelesaikan permasalhan di atas dapat menggunakan konsep KPK, yaitu dengan mnentukan KPK bilangan 3,4, dan 5.

Kelipatan 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,24, 27 ,..

Kelipatan 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.32. 36, …

Kelipatan 6: 6.12, 18, 24, 30, 36, 42, …

Kelipatan dari 3, 4, dan 6 yang terkecil adalah 24

Menghitung mundur 24 hari sebelum tanggal 5 Februari 2021.

Dari tanggal 5 Februari 2021 sampai akhir bulan Januari 2021 = 5 hari, di bulan januari 24-5 = 19 hari sebelum tanggal 31 Januari atau menghitung mundur dari akhir bulan januari, yaitu 31- 19 = 12 hari. Dari ketiga jadwal les matematika di atas, terlihat bahwa mereka berlatih bersama untuk pertama kalinya pada tanggal 12 Januari 2021.

D. Rangkuman

1. Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat

a. Bilangan adalah suatu unsur atau objek yang tidak didefinisikan (*underfined term*).

b. Lambang bilangan adalah simbol atau lambang yang digunakan dalam mewakili suatu bilangan.

c. Sistem numerasi adalah sekumpulan lambang dan aturan pokok untuk menuliskan bilangan.

d. Bilangan kardinal menyatakan hasil membilang (berkaitan dengan pertanyaan berapa banyak dan menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan).

e. Bilangan ordinal menyatakan urutan atau posisi suatu objek.

f. Bilangan komposit adalah bilangan asli yang memiliki lebih dari 2 faktor.

g. Bilangan asli dapat digolongkan menurut faktornya yaitu: bilangan genap, bilangan ganjil, dan bilangan prima.

h. Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan kardinalitas suatu himpunan.

i. Bilangan sempurna adalah bilangan asli yang jumlah faktornya (kecuali faktor yang sama dengan dirinya) sama dengan bilangan tersebut.

j. Bilangan bulat terdiri dari gabungan bilangan bulat positif (bilangan asli), bilangan nol, dan bilangan bulat negatif (lawan dari bilangan asli). .

k. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan $a\ dan$ b bilangan bulat, $b\ \neq\ 0$.

l. Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan-bilangan bulat $a\ dan\ b$, dengan b ≠ 0.

m. Bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dengan bilangan irasional.

n. Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $z = a + bi$, dengan $a, b\ \in R$, dan i : imajiner (bilangan khayal).

2. Bilangan Bulat dan Operasi Hitung Pada Bilangan Bulat

a. Jika a dan b adalah bilangan bulat positif, maka jumlah dari kedua bilangan akan dilambangkan $a + b$, yang diperoleh dengan menentukan cacah atau banyaknya gabungan himpunan dari $a\ dan\ b$.

b. Operasi hitung penjumlahan bersifat tertutup, komutatif, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan memiliki invers terhadap penjumlahan.

c. Operasi hitung pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan. Jika sebuah bilangan bulat positif a dikurangi dengan bilangan bulat positif b menghasilkan bilangan bulat positif c atau ($a - b = c$), maka operasi penjumlahan yang terkait adalah $b + c = a$, dengan syarat $a > b$.

d. Perkalian pada dua buah bilangan bulat positif adalah penjumlahan yang berulang.

e. Operasi hitung perkalian antara lain bersifat tertutup, komutatif, asosiatif, distributif dan memiliki unsur identitas.

f. Untuk setiap $a\ dan\ b$ anggota bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ sedemikian sehingga $a = bc$.

3. FPB dan KPK

a. Bilangan bulat a $(a \neq 0)$ merupakan faktor dari suatu bilangan bulat b sedemikian sehingga $b = ac$.

b. Misalkan a dan b bilangan bulat, faktor persekutuan terbesar dari a dan b, FPB (a, b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi: d│a dan d│b.

c. FPB dari dua bilangan positif adalah bilangan bulat terbesar yang membagi keduanya. Dinyatakan dengan a = FPB (a, b)

d. Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan bukan nol a dan b, KPK$\{a, b\}$ adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi a│m dan b│m. KPK $\{a, b\}$ = axb