Pembelajaran 6. Kombinatorika dan Statistika

A. Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kaidah pencacah, permutasi, dan kombinasi
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan peluang kejadian
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pemusatan data dan penyebaran

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menganalsis kaidah pencacahan melalui masalah kontekstual
2. Menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan konsep permutasi
3. Menyelesaikanmasalah kontekstual dengan konsep kombinasi
4. Menerapkan konsep peluang suatu kejadian untuk menyelesaikan masalah kontekstual
5. Menetukan ukuran pemusatan data berkelompok
6. Menetukan ukuran penyebaran data berkelompok

C. Uraian Materi

1. Kaidah Pencacahan, Permutas, dan Kombinasi

Kaidah Pencacahan

Hal yang dibicarakan dalam kombinatorika adalah aturan pencacahan. Pada aturan pencacahan terdapat dua prinsip utama, yaitu aturan perkalian dan aturan penambahan.

Untuk aturan perkalian, dapat dinyatakan sebagai berikut:

“Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama dan kejadian kedua tersebut secara bersama-sama terjadi dalam ($m \times n$) cara.”

Contoh:

a. Berapakah banyaknya kejadian yang mungkin muncul jika 2 dadu dilempar satu kali?
b. Pada suatu kelas yang terdiri atas 20 peserta didik akan dibentuk kepengurusan kelas yaitu ketua dan sekretaris. Ada berapa cara kepengurusan kelas tersebut dapat dibentuk?

   Jawab

   a. Dadu pertama akan muncul 6 kemungkinan kejadian, dadu kedua juga akan muncul 6 kemungkinan kejadian. Kejadian secara bersamaan akan muncul $6 \times 6 = 36$ kemungkinan kejadian.
   b. Untuk ketua kelas ada 20 cara, untuk sekretaris ada 19 cara. Secara berpasangan ada $20 \times 19 = 380$ cara.

Sedangkan untuk aturan penambahan, perhatikan pernyataan berikut:

“Jika dalam kejadian pertama dapat terjadi dalam $\boldsymbol{m}$ cara dan kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam $\boldsymbol{n}$ cara, maka kejadian pertamaa atau kedua dapat terjadi dalam $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$ cara”

Contoh:

Di dalam kotak berisi 5 pulpen dan 3 pinsil. Berapakah banyaknya cara untuk mengambil 1 pulpen atau 1 pinsil?

Jawab

Kejadian memilih 1 pulpen ada 5 cara,

Kejadian memilih 1 pinsil ada 3 cara,

Banyaknya memilih 1 pulpen atau 1 Pinsil adalah $\mathbf{5}+\mathbf{3}=\mathbf{8}$

Permutasi

Pada aturan pencacahan Permutasi, urutan kejadian sangat diperhatikan. Perhatikan pernyataan berikut:

“Jika diberikan n obyek berbeda, sebuah permutasi k dari n obyek berbeda adalah sebuah jajaran dari k obyek yang urutannya diperhatikan”

Contoh

Diberikan huruf-huruf a, b, c dan d.

abcd, dbca, cadb, dbac dan sebagainya adalah permutasi-permutasi 4 huruf dari 4 huruf

abc, abd, acb, bca, dcb dan sebagainya adalah permutasi-permutasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui

cb, bd, ad, cd, ba, dc dan sebagainya adalah permutasi-permutasi 2 huruf dari 4 huruf yang diketahui

dan seterusnyanya

Banyaknya Permutasi r-obyek dari n-Obyek yang berbeda diberi notasi $P(n, r)$ dimana

$$P_r^n = P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kombinasi

Pada aturan pencacahan Kombinasi, urutan kejadian tidaklah diperhatikan. Perhatikan pernyataan berikut:

"Diberikan n-obyek berbeda. Sebuah kombinasi k dari n-obyek berbeda adalah jajaran dari k-obyek yang urutannya tidak diperhatikan"

Contoh

Misalkan dari 4 bersaudara Asep (A), Beni (B), Caca (C) dan Deni (D) akan diundang 2 orang untuk mewakili rapat keluarga besar. Ada berapa cara memenuhi undangan tersebut? Bagaimana jika yang diundang 3 orang dari 4 bersaudara itu?

Jika diundang 2 orang untuk mewakili rapat keluarga besar itu, maka yang mungkin hadir adalah (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D). Jika sudah ada (A,B) maka tidak boleh dimasukkan lagi (B,A) karena (A,B) = (B,A).

Jika diundang 3 orang untuk mewakili rapat keluarga besar, maka yang mungkin hadir adalah (A,B,C), (A,B,D), (A,C,D) dan (B,C,D) dimana (A,B,C)=(A,C,B)=(B,C,A)=(B,A,C)=(C,A,B)=(C,B,A).

$$C_k^n = C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2. Teori Peluang

Ruang Sampel

Untuk memahami ruang sampel dilambangkan S, misalnya siswa diminta melempar satu keping uang logam, maka kemungkinan yang muncul A (angka) atau G (gambar). Percobaan lain yang bisa dilakukan misalnya melempar sebuah dadu, kemungkinan muncul mata dadu bernomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6. Seluruh kejadian atau kemungkinan yang mungkin terjadi atau muncul disebut ruang sampel. Jadi ruang sampel pelemparan satu keping uang logam adalah {A,G} dan ruang sampel pelemparan sebuah dadu adalah { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Jadi, Ruang sampel {S} adalah semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.

Contoh 1 :

Suatu percobaan melemparkan sebuah dadu dan satu keping uang logam secara bersamaan, maka ruang sampelnya adalah :

S = { (A,1), (A,2), (A,3), (A,4), (A,5), (A,6), (G,1), (G,2), (G,3), (G,4), (G,5), (G,6)}

Contoh 2 :

Suatu percobaan melantunkan 2 mata uang logam bersama-sama. Maka ruang sampelnya : S = { AA , AG , GA , GG } , dimana A = Angka dan G = gambar.

Titik Sampel

Titik sampel adalah semua anggota dari ruang sampel.

Contoh :

Pada pelemparan sebuah dadu ruang sampelnya S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, maka titik sampelnya : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dalam percobaan pelantunan 2 mata uang bersama-sama, ruang sampelnya adalah : S = { AA , AG , GA , GG }, maka titik sampelnya : (AA) , (AG) , (GA) , (GG).

Kejadian

Kejadian adalah sekelompok titik sampel yang membentuk himpunan bagian dari ruang sampel.

Contoh 1:

Dari percobaan pelemparan sebuah dadu, tentukan:

a. kejadian muncul angka kelipatan 2
b. kejadian muncul angka prima

Penyelesaian:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

a. Misal kejadian A adalah munculnya mata dadu dengan angka kelipatan 2, maka kejadian A = { 2, 4, 6 }, n(A) = 3.
b. Misal kejadian P adalah munculnya mata dadu prima, maka kejadian P = { 2, 3, 5 }, n(P) = 3.

Peluang

Dalam suatu percobaan, peluang kejadian munculnya A adalah perbandingan antara banyaknya anggota A dengan dengan banyaknya semua kemungkinan yang mungkin terjadi pada suatu percobaan. Peluang munculnya kejadian A diberi lambang P(A) dan dihitung dangan rumus sebagai berikut : P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)}$,

dengan: n(A) = banyaknya anggota kejadian A
n(S) = banyaknya anggota ruang sampel.

Besarnya peluang terletak antara 0 sampai 1 atau **$0 \le P(A) \le 1$**, jika P(A) = 0 maka disebut **kemustahilan** (tak mungkin terjadi) dan jika P(A) = 1 maka disebut **kepastian** (pasti terjadi).

Hubungan nilai kepastian dan lawannya (kemustahilan) adalah :

$P(N) = 1 - P(N^C)$ atau **$P(N) + P(N^C) = 1$**

dimana : **N^C** = kejadian bukan N

Contoh :

Sebuah dadu dilemparkan sekali, hitunglah peluang munculnya

a. Jumlah mata dadu bilangan prima !
b. Jumlah mata dadu ≤ 6

c. Jumlah mata dadu = 7

Penyelesaian :

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } atau n(S) = 6

a. Kejadian jumlah mata dadu bilangan prima : P = { 2, 3, 5 } atau n(P) = 3

P(P) = $\frac{n(P)}{n(S)}$ = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$

c. Kejadian muncul jumlah mata dadu $\leq$ 6: B= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, n(B) = 6

P(B) = $\frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$ (**Kepastian**)

d. Kejadian muncul jumlah mata dadu = 7: C= { }, n (C) = 0

P(C) = $\frac{n(C)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$ (**Kemustahilan**).

Frekuensi Harapan

Misalkan P(A) adalah peluang kejadian A dalam suatu percobaan yang dilakukan n kali, maka frekuensi harapan kejadian A adalah **Fh(A) = n ×P(A)** ,

Contoh :

Tiga uang logam yang dilempar secara serentak sebanyak 120 kali, berapkah frekuensi harapan munculnya 2 gambar ?

Penyelesaian :

S = { AAA , AAG ,AGA , GAA, AGG, GAG, GGA, GGG } maka n(S) = 8

Misal kejadian muncul 2 gambar adalah kejadian Q, maka :

Q = { GGA , GAG , AGG } maka n(Q) = 3

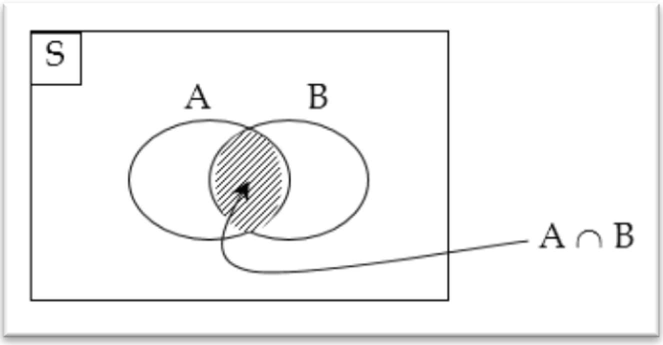
Sehingga P(Q) = $\frac{\mathrm{n(Q)}}{\mathrm{n(S)}}$ = $\frac{3}{8}$

Maka frekuensi harapan kejadian Q adalah : Fh(Q) = 120 x $\frac{3}{8}$ = 45

Kejadian Saling Lepas

Misalkan A adalah kejadian terambilnya kartu As dan B adalah kejadian terambilnya kartu keriting pada pengambilan secara acak pada satu set kartu Bridge. Pada kejadian ini mungkin terjadi kejadian A sekaligus terjadi kejadian B, misalkan terambil kartu As keriting.

Perhatikan diagram Venn berikut :



Dari diagram Venn di atas didapatkan bahwa :

$$n\ (A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sehingga :

$$P\ (A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dengan demikian untuk sembarang kejadian **A atau B** berlaku :

$$P\ (A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dua kejadian A dan B dikatakan kejadian saling lepas apabila himpunan A dan B saling asing atau $A \cap B = \varnothing$ sehingga $P(A \cap B) = 0$. Akibatnya peluang $A \cup B$ adalah **jumlah peluang A dengan peluang B**.

$$P\ (A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh :

Sebuah dadu dilempar satu kali, A adalah kejadian muncul mata dadu genap dan B adalah kejadian muncul mata dadu prima, hitunglah peluang munculnya mata dadu genap atau kelipatan 5.

Penyelesaian :

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } maka n(S) = 6

Misal kejadian muncul kelipatan 5 adalah kejadian C, maka C = {5} sehingga n(C) = 1

Sehingga : $A \cap C = \{\ \}$ atau $\varnothing$ (himpunan kosong)

Maka : $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

$$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Kejadian Saling Bebas

Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika terjadinya A tidak mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B dan sebaliknya.

Pada kejadian A dan B saling bebas berlaku : *$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$*

Contoh :

Dalam percobaan pengambilan bola dari kotak I dan kotak II. Kotak I berisi 4 bola hitam (H) dan 6 bola putih (P), kotak II berisi 5 bola merah (M) dan 4 bola putih. Dari kotak I diambil 3 bola dan dari kotak dua diambil 4 bola. Tentukan peluang terambilnya 3 bola hitam dari kotak I dan 4 bola merah dari kotak II.

Penyelesaian :

$$P(A) = P(3H \text{ kotak I}) = \frac{C_{(4,3)}}{C_{(10,3)}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(B) = P(4M \text{ kotak II}) = \frac{C_{(5,4)}}{C_{(9,4)}} = \frac{5}{126}$$

Maka $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= \frac{1}{30} \times \frac{5}{126}$$

$$= \frac{1}{756}$$

3. Statistika

Ukuran Pemusatan

Salah satu hal yang penting pada statistika yaitu pemahaman berbagai ukuran statistik untuk memberikan interpretasi data. Suatu kumpulan data biasanya memiliki kecenderungan memusat ke sebuah nilai tertentu yang dapat mewakili seluruh data. Nilai tersebut biasanya terletak di pusat data dan disebut **nilai sentral (nilai pusat).** Ada tiga jenis ukuran pemusatan data yang banyak digunakan, yaitu Rata-rata Hitung (*Mean*), Nilai Tengah

(*Median*) dan Nilai yang Paling Sering Muncul (*Modus*).

a. Mean

Mean dilambangkan dengan $\overline{x}$ (dibaca x bar) didefinisikan sebagai hasil bagi jumlah nilai data dengan banyaknya data.

Data Tunggal

Jika terdapat n buah nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ maka

$$\text{Mean} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n} \text{ atau } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ atau } \overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

dengan $\sum x$ = jumlah semua data dan n = banyak data

Contoh: Carilah mean dari data : 8, 4, 5, 3, 6

Jawab : $\overline{x} = \frac{8+4+5+3+6}{5} = \frac{26}{5}$ = 5,2

Untuk data berbobot yaitu apabila setiap x_i mempunyai frekuensi f_i maka mean adalah :

$$\overline{x} = \frac{f_1.x_1 + f_2.x_2 + f_3.x_3 + \ldots. + f_k.x_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots. + f_k} \text{ atau}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i.x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \text{ atau } \overline{x} = \frac{\sum f.x}{\sum f}$$

Contoh : Hitung mean data nilai fisika 40 anak berikut :

Nilai	5	6	7	8	9
frekuensi	6	15	13	4	2

Jawab :

Nilai	f	f.x
5	6	30
6	15	90
7	13	91
8	4	32
9	2	18
Jumlah	40	261

$$\bar{x} = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{261}{40} = 6{,}5$$

Data Berkelompok

Untuk data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frejuensi, terlebih dahulu harus ditentukan tanda kelas atau nilai tengah dari masing-masing kelas interval (x_i)

$$x_i = \frac{batas\,atas\,kelas - batas\,bawah\,kelas}{2}$$

Selanjutnya $\bar{x}$ dapat dihitung dengan 3 cara, yaitu secara langsung, dengan rata-rata sementara dan dengan cara “coding”.

Secara langsung

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Dengan:

x_i = tanda kelas ke-*i*

f_i = frekuensi pada kelas ke-*i*

$\sum f_i$ = banyak data (jumlah semua frekuensi)

Contoh : Tentukan mean dari data berikut :

Kelas	Frekuensi
21-25	2
26-30	8
31-35	9
36-40	6
41-45	3
46-50	2

Jawab :

Kelas	f_i	x_i	$f_i.x_i$
21-25	2	23	46
26-30	8	28	224
31-35	9	33	297
36-40	6	38	228
41-45	3	43	129
46-50	2	48	96
Jumlah	30		1020

Maka mean $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i}$

$= \dfrac{1020}{30}$

$= 34$

Dengan rata-rata sementara ($\overline{x_s}$)

Terlebih dulu ditentukan rata-rata sementara (rata-rata yang diduga) $\bar{x}_s$, biasanya diambil dari titik tengah kelas dengan frekuensi terbesar. Kemudian menghitung simpangan tiap data terhadap rata-rata sementara dengan rumus $d_i = x_i - \bar{x}_s$.

Mean (rata-rata hitung) sebenarnya dinyatakan dengan rumus

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i.d_i}{\sum f_i} \text{ atau } \bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f.d}{\sum f}$$

Contoh: Hitung mean data pada tabel di atas dengan menggunakan rata-rata sementara.

Penyelesaian:

Kelas	f_i	x_i	$d_i = x_i - x_s$	$f_i . d_i$
21-25	2	23	-10	-20
26-30	8	28	-5	-40
31-35	9	33	0	0
36-40	6	38	5	30
41-45	3	43	10	30
46-50	2	48	15	30
Jumlah	30			30

Maka Mean $\bar{x} = \bar{x}_s + \dfrac{\sum f_i.d_i}{\sum f_i}$

$= 33 + \frac{30}{30}$

$= 33 + 1$

$= 34$

Dengan cara "*Coding*"

Terlebih dulu ditentukan rata-rata sementara (rata-rata yang diduga) $\overline{x}_s$, biasanya diambil dari titik tengah kelas dengan frekuensi terbesar. Kelas interval yang memuat rata-rata sementara diberi kode 0. Kelas interval diatasnya diberi kode -1, -2 dst, sedangkan kelas interval di bawahnya diberi kode 1, 2, dst.

Selanjutnya mean sebenarnya dihitung dengan rumus:

$$\overline{x} = \overline{x}_s + p\left(\frac{\sum f_i.\mu_i}{\sum f_i}\right)$$

dengan p = panjang kelas

Contoh: Hitung mean data pada tabel di atas dengan menggunakan cara "coding".

Penyelesaian:

Kelas	f_i	x_i	μ_i	$f_i \,.\, \mu_i$
21-25	2	23	-2	-4
26-30	8	28	-1	-8
31-35	9	33	0	0
36-40	6	38	1	6
41-45	3	43	2	6
46-50	2	48	3	6
Jumlah	30			6

Maka Mean $\overline{x} = \overline{x}_s + p\left(\frac{\sum f_i.\mu_i}{\sum f_i}\right)$

$= 33 + 5\left(\frac{6}{30}\right)$

$= 33 + 1$

$= 34$

b. Median/Nilai tengah

Median dilambangkan dengan *Me* adalah nilai yang letaknya di tengah atau data ke $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ dari data yang telah diurutkan dari nilai terkecil sampai terbesar.

Median Data Tunggal

- Jika banyak data **ganjil** maka Me adalah data yang terletak **tepat yang di tengah** setelah diurutkan.
- Jika banyak data **genap** maka Me adalah **rata-rata dari dua data yang terletak di tengah** setelah diurutkan.

Contoh :

Tentukan median dari data: 3,5,4,7,5,6,7,6,8,9,4,6,6

Jawab:

Data diurutkan menjadi 3,4,4,5,5,6,6,6,67,7,8,9 (n=13)

Me = data ke-$\left(\frac{13+1}{2}\right)$

= data ke-7

= 6

Median Data Berkelompok

Untuk menetukan median dari data berkelompok, terlebih dahulu dihitung frekuensi kumulatif dari setiap kelas interval dan ditentukan kelas median atau kelas yang memuat data ke-$\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Selanjutnya Me dihitung dengan rumus:

$$\text{Me} = \text{Tb} + \text{p}. \frac{\left(\frac{n}{2} - F\right)}{f}$$

dengan Tb = tepi bawah kelas Median

$$= \frac{batas\,bawah\,kelas\,median + batas\,atas\,kelas\,sebelumnya}{2}$$

p = panjang kelas interval

n = banyak data

F = frekuensi komulatif sampai dengan kelas sebelum kelas Me

f = frekuensi pada kelas Me

Contoh: Tentukan Median dari data berikut:

Kelas	F
20 – 29	7
30 – 39	13
40 – 49	20
50 – 59	12
60 - 69	8

Jawab:

Kelas	f	F
20 – 29	7	7
30 – 39	13	**20**
40 – 49	**20**	40
50 – 59	12	52
60 - 69	8	60
Jumlah	60	

Kelas median

Tb = $\frac{40+39}{2} = 39,5$

n = 60

p = 40 – 30 = 10

F = 20

f = 20

Me = 39,5 + $\frac{10\left(\frac{60}{2}-20\right)}{20}$

= 39,5 + $\frac{10(30-20)}{20}$

= 39,5 + $\frac{10.10}{20}$

= 39,5 + 5

= **44,5**

c. Modus

Modus dilambangkan dengan ***Mo*** adalah data yang paling sering muncul atau data yang memiliki frekuensi terbanyak.

Modus Data Tunggal

Contoh: Tentukan modus dari data

a. 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5,6, 9

b. Perhatikan data berikut ini

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
3	4	7	5	6	5	7	6	8	6

Jawab:

a. Mo = 5

b. Mo = 6

Modus Data Berkelompok

Untuk data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, terlebih dahalu ditentukan kelas modus (kelas dengan frekuensi terbesar), kemudian modus dihitung dengan rumus:

$$Mo = Tb + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

dengan:

Tb = tepi bawah kelas modus

p = panjang kelas

d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sebelumnya.

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sesudahnya.

Contoh:

Tentukan modus dari data berikut:

Kelas	f
21 – 25	2
26 – 30	8
31 – 35	9
36 – 40	6
41 – 45	3

Kelas modus

46 - 50	2

Jawab:

Tb = 30,5

p = 5

$d_1 = 9 - 8 = 1$

$d_2 = 9 - 6 = 3$

$$Mo = 30{,}5 + 5\left(\frac{1}{1+3}\right)$$

$= 30{,}5 + 1{,}25$

$=$ **31,75**

Ukuran Penyebaran

Ukuran penyebaran data (dispersi) meliputi: jangkauan, kuartil, desil, presentil, simpangan kuartil, simpangan rata-rata dan simpangan baku. Seain itu pada kegiatan belajar ini akan dibahas pula mengenai nilai standar (*Z- Score*) dan koefisien variasi.

Jangkauan

Jangkauan atau Range (R) adalah selisih data terbesar (x_{max}) dengan data terkecil (x_{min}), dirumuskan dengan

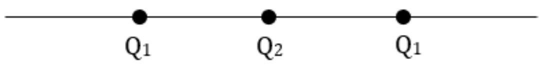
$$R = x_{max} - x_{min}$$

Contoh. Tentukan jangkauan dari data: 7, 12, 9, 11, 15, 27, 14, 17, 19, 24, 16

Jawab : R = 27 – 7 = 20

Kuartil

Kuartil dilambangkan Q_i adalah nilai data yang membagi keseluruhan data terurut menjadi empat bagian yang sama banyaknya. Dengan demikian terdapat tiga kuartil, yaitu:



Kuartil data tunggal

Untuk data tunggal, kuartil dapat dihitung dengan rumus:

$$Q_i = \text{data ke } \frac{i(n+1)}{4} \qquad \text{dengan } i = 1, 2, 3$$

Contoh : Tentukan kuartil dari data 3,4,4,5,5,6,6,6,6,7,7,8,9 (n=13)

Jawab :

$$Q_1 = \text{data ke-}\frac{1(13+1)}{4}$$

$$= \text{data ke-}3\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{4+5}{2}$$

$$= 4{,}5$$

$$Q_2 = \text{data ke-}\frac{2(13+1)}{4}$$

$$= \text{data ke-}7$$

$$= 6$$

$$Q_3 = \text{data ke-}\frac{3(13+1)}{4}$$

$$= \text{data ke-}10\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{7+7}{2}$$

$$= 7$$

Kuartil data berkelompok

Kuartil dari data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dapat dihitung dengan rumus:

$$Q_i = Tb + p\left(\frac{\frac{i}{4}.n - F}{f}\right) \qquad \text{dengan } i = 1,2,3$$

dengan:

Tb = tepi bawah interval Q_i

P = panjang kelas interval Q_i

n = banyak data

F = frekuensi kumulatif sampai kelas sebelum kelas Q_i

f = frekuensi pada kelas Q_i

Contoh: Hitung kuartil dari data pada Tabel 4.2 berikut :

Nilai	f	F	
51 – 55	4	4	
56 - 60	20	24	
61 – 65	24	48	← Q_1
66 – 70	56	104	← Q_2
71 – 75	19	123	← Q_3
76 – 80	16	139	
81 – 85	10	149	
86 – 90	7	156	
91 – 95	3	159	
96 – 100	1	160	

Jawab :

$$Q_1 = 60{,}5 + 5\left(\frac{\frac{1}{4}.160-24}{24}\right) = 60{,}5 + 3{,}35 = 63{,}85$$

$$Q_2 = 65{,}5 + 5\left(\frac{\frac{2}{4}.160-48}{56}\right) = 65{,}5 + 2{,}86 = 68{,}36$$

$$Q_3 = 70{,}5 + 5\left(\frac{\frac{3}{4}.160-104}{19}\right) = 70{,}5 + 4{,}21 = 74{,}71$$

Jangkauan Antar Kuartil (Hamparan = H)

Jangkauan Antar Kuartil adalah selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah, dirumuskan dengan:

$$H = Q_3 - Q_1$$

Contoh: Hitunglah hamparan dari data pada Tabel 4.2

Jawab: H = 74,71 - 63,85 = 10,86

Jangkauan Semi Inter Kuartil (Simpangan Kuartil = Q_d)

Jangkauan Semi Inter Kuartil adalah setengah dari selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah, dirumuskan dengan:

$$Q_d = \frac{1}{2}\,(Q_3 - Q_1)$$

Contoh: Hitunglah simpangan kuartil dari data pada Tabel 4.2

Jawab: $Q_d = \frac{1}{2}(74,71 - 63,85) = 5,43$

Desil

Desil dilambangkan dengan D_i adalah nilai data yang membagi keseluruhan data terurut menjadi sepuluh bagaian yang sama banyaknya. Dengan demikian terdapat sembilan desil, yaitu desil ke-1 (D_1), desil ke-2 (D_2),..., desil ke-9 (D_9).

Desil data tunggal

Untuk data tunggal, desil dapat dihitungan dengan rumus:

D_i = data ke $\frac{i(n+1)}{10}$ dengan i = 1,2,3,4,…,9

Contoh: Tentukan D_1, D_3 dan D_7 dari data 3,4,4,5,5,6,6,6,6,7,7,8,9 (n=13)

Jawab:

D_1 = data ke-$\frac{1(13+1)}{10}$

= data ke-1 $\frac{2}{5}$ (antara data ke-1 dan ke-2)

= 3 + $\frac{2}{5}$ (4 – 3)

= 3,4

D_3= data ke-$\frac{3(13+1)}{10}$

= data ke-4 $\frac{1}{5}$ (antara data ke-4 dan ke-5)

= 5 + $\frac{1}{5}$ (5 - 5)

= 5

D_7 = data ke-$\frac{7(13+1)}{10}$

= data ke-9 $\frac{4}{5}$ (antara data ke-9 dan ke-10)

= 6 + $\frac{4}{5}$ (7 - 6)

= 6,8

Desil data berkelompok

Desil untuk data berkelompok dapat dihitung dengan rumus:

D_i = Tb + p $\left(\dfrac{\frac{i}{10}.n-F}{f}\right)$ i = 1,2,3,4,…,9

dengan:

Tb = tepi bawah interval kelas D_i

P = panjang kelas interval

n = banyak data

F = frekuensi kumulatif sebelum kelas D_i

f = frekuensi pada kelas D_i

Contoh: Hitung D_5 dan D_9 dari data berikut :

Nilai	f	F	
51 – 55	4	4	
56 - 60	20	24	
61 – 65	24	48	
66 – 70	56	104	← D_5
71 – 75	19	123	
76 – 80	16	139	
81 – 85	10	149	← D_9
86 – 90	7	156	
91 – 95	3	159	
96 – 100	1	160	

Jawab :

D_5 = 60,5 + 5 $\left(\dfrac{\frac{5}{10}.160-48}{56}\right)$ = 65,5 + 2,86 = 68,36

D_9 = 80,5 + 5 $\left(\dfrac{\frac{9}{10}.160-139}{10}\right)$ = 80,5 + 0,5 = 81,0

Persentil

Persentil dilambangkan dengan P_i adalah nilai data yang membagi keseluruhan data terurut menjadi seratus bagian yang sama banyaknya. Dengan demikian terdapat 99 persentil, yaitu P_1, P_2, ...,P_{99}.

Persentil data tunggal

Persentil data tunggal dapat diperoleh dengan rumus:

P_i = data ke-$\dfrac{i(n+1)}{100}$ dengan i = 1,2,...,99.

Contoh: Untuk menentukan kekuatan nyala bola lampu listrik, dicoba menyalakan 120 bola lampu listrik dan diperoleh data sebagai berikut :

Kekuatan nyala (hari)	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Banyaknya lampu	4	16	12	12	8	28	20	8	12

Hitunglah P_{40} dan P_{80} dari data tersebut!

Jawab:

P_{40} = data ke- $\frac{40(120+1)}{100}$

= data ke-48 $\frac{2}{5}$

= 49

P_{80} = data ke- $\frac{80(120+1)}{100}$

= data ke-96 $\frac{4}{5}$

= 51

Persentil data berkelompok

Untuk data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, persentil dapat dihitung dengan rumus :

$$P_i = Tb + p\left(\frac{\frac{i}{100}n - F}{f}\right) \qquad i = 1,2,3,\ldots\ldots,99$$

dengan:

Tb = tepi bawah kelas P_i

p = panjang kelas

n = banyak data

F = frekuensi kumulatif sampai dengan kelas sebelum kelas P_i

f = frekuensi pada kelas P_i

Contoh: Hitung P_{10} dan P_{90} dari data berikut :

Nilai	f	F	
51 – 55	4	4	
56 - 60	20	24	P_{10}
61 – 65	24	48	
66 – 70	56	104	
71 – 75	19	123	
76 – 80	16	139	
81 – 85	10	149	P_{90}
86 – 90	7	156	
91 – 95	3	159	
96 – 100	1	160	

Jawab :

$$P_{10} = 55{,}5 + 5\left(\frac{\frac{10}{100}60 - 4}{20}\right) = 55{,}5 + 3{,}0 = 58{,}5$$

$$P_{90} = 80{,}5 + 5\left(\frac{\frac{90}{100}60 - 139}{10}\right) = 80{,}5 + 0{,}5 = 81{,}0$$

Jangkauan Persentil (JP)

Jangkauan persentil adalah selisih antara persentil ke-90 dengan persentil ke-10, dirumuskan dengan:

$$JP = P_{90} - P_{10}$$

Contoh: hitunglah jangkauan persentil dari data berikut ini:

Nilai	f	F
51 – 55	4	4
56 - 60	20	24
61 – 65	24	48
66 – 70	56	104
71 – 75	19	123
76 – 80	16	139
81 – 85	10	149
86 – 90	7	156
91 – 95	3	159
96 – 100	1	160

Jawab : $JP = P_{90} - P_{10}$

$= 81{,}0 - 58{,}5$

$= 22{,}5$

Simpangan Rata-rata

Simpangan rata-rata dilambangkan (SR) adalah jumlah selisih mutlak nilai setiap data dengan rata-rata dibagi banyaknya data.

a. **Simpangan rata-rata data tunggal**

$$SR = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

dengan x_i = nilai data

$\bar{x}$ = rata-rata

n = banyak data

Contoh: Tentukan simpangan rata-rata dari data: 7,11,10,9,8,6

Jawab : $\bar{x} = \frac{7 + 11 + 10 + 9 + 8 + 6}{6}$ = 8,5

$$SR = \frac{|7 - 8{,}5| + |11 - 8{,}5| + |10 - 8{,}5| + |9 - 8{,}5| + |8 - 8{,}5| + |6 - 8{,}5|}{6}$$

$$= \frac{1{,}5 + 2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2{,}5}{6}$$

$$= \frac{9}{6}$$

= 1,5

Simpangan rata-rata data berkelompok

$$SR = \frac{\sum (f_i \cdot |x_i - \bar{x}|)}{\sum f_i}$$

dengan f_i = frekuensi data kelas ke-i

x_i = nilai tengah kelas ke-i

$\bar{x}$ = mean (rata-rata)

$\sum f_i$ = n = banyak data

Contoh : Tentukan simpangan rata-rata data

Interval	f_i	x_i	$f_i.x_i$	$\left\| x_i - \bar{x} \right\|$	$f_i.\left\| x_i - \bar{x} \right\|$
21-25	2	23	46	11	22
26-30	8	28	224	6	48
31-35	9	33	297	1	9
36-40	6	38	228	4	24
41-45	3	43	129	9	27
46-50	2	48	96	14	28
Jumlah	30		1020		158

Jawab :

Mean $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1020}{30} = 34$

SR = $\dfrac{\sum f_i \cdot \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum f_i} = \dfrac{158}{30} = 5{,}27$

Simpangan Baku

Simpangan Baku atau Deviasi Standar dilambangkan dengan SD adalah akar dari jumlah kuadrat selisih antara rata-rata hitung dengan semua nilai dibagi banyaknya.

Data tunggal

Simpangan baku (SD) dari tunggal x_1, x_2, x_3, …..,x_n drumuskan sebagai:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

dengan x_i = data ke-I

$\bar{x}$ = mean

n = banyak data

Contoh: Tentukan simpangan baku dari data 5, 3, 7, 6, 4, 3, 10, 2

Jawab :

$$\bar{x} = \frac{5+3+7+6+4+3+10+2}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

$$SD = \sqrt{\frac{(5-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (3-5)^2 + (10-5)^2 + (2-5)^2}{8}}$$

$= \sqrt{\dfrac{0+4+4+1+1+4+25+9}{8}}$

$= \sqrt{\dfrac{48}{8}}$

$= \sqrt{6}$

Data berkelompok

Simpangan baku untuk data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dirumuskan sebegai:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum f_i.(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

dengan f_i = frekuensi kelas ke-i

x_i = nilai tengah kelas ke-i

$\bar{x}$ = mean(rata-rata)

$\sum f_i$ = n = banyak data

Contoh. Hitung simpangan baku dari data :

Interval	f_i	x_i	$f_i.x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i.(x_i - \bar{x})^2$
21-25	2	23	46	-11	121	242
26-30	8	28	224	-6	36	288
31-35	9	33	297	-1	1	9
36-40	6	38	228	4	16	96
41-45	3	43	129	9	81	243
46-50	2	48	96	14	196	392
Jumlah	30		1020			1270

Jawab :

Mean $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1020}{30} = 34$

SD = $\sqrt{\dfrac{1270}{30}} = \sqrt{42{,}33} = 6{,}51$

Nilai Standar (Z-score)

Nilai standar (Z-Score) adalah nilai yang menyatakan perbedaan antara besar suatu hal/variabel dengan rata-ratanya. Nilai standar digunakan untuk membandingkan dua hasil pengukuran atau lebih sehingga diketahui keberhasilan dua usaha yang dinyatakan dalam data (angka).

Untuk menghitung besarnya Nilai Standar (Z-Score) digunakan rumus :

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{SD}$$

dengan : x = nilai data

$\bar{x}$ = mean (rata-rata)

SD = simpangan baku

Contoh :

Pada ujian matematika, Andi mendapat nilai 68, rata-rata kelasnya 55 dan simpangan baku 10. Berapa Nilai Standar matematika Andi ?

Jawab : x = 68 , $\bar{x}$ = 55 , SD= 10

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{SD} = \frac{68 - 55}{10} = 1{,}3$$

Jadi nilai matematika Andi menyimpang 1,3 di atas nilai rata-rata.

Contoh:

Berikut ini adalah petikan nilai rapor seorang siswa SMK :

Mata Pelajaran	Nilai	Nilai Rata-rata	Simpangan Baku
Bahasa Indonesia	85	75	15
Bahasa Inggris	80	68	10
Matematika	70	65	8

Pada mata pelajaran apa siswa tersebut mendapat kedudukan paling baik?

Jawab :

Nilai Standar Bahasa Indonesia: $Z_{Ind} = \frac{85 - 75}{15} = 0{,}67$

Nilai Standar Bahasa Inggris: $Z_{Ing} = \frac{80 - 68}{10} = 1{,}2$

Nilai Standar Metematika: $Z_{Mtk} = \frac{70 - 65}{8} = 1{,}9$

Jadi kedudukan siswa tersebut yang paling baik adalah pada mata pelajaran Matematika.

D. Rangkuman

1. Kaidah Pencacahan

a. Aturan Pengisian tempat

Untuk menentukan banyaknya cara suatu kejadian dapat disusun dari k tempat. ditentukan dengan rumus:

Banyak susunan unsur = n_1 x n_2 x … x n_k

n_1 = banyak cara untuk menempati tempat ke-1

n_2 = banyak cara untuk menempati tempat ke-2

n_k = banyak cara untuk menempati tempat ke-k

b. Permutasi (AB ≠ BA)

Penyusunan unsur-unsur dengan memperhatikan urutan.

i. Permutasi r unsur dari n unsur (r ≤ n)

$$\boxed{P_r^n = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

ii. Permutasi yang mengandung unsur-unsur sama

$$\boxed{{}_nP_{a,b,c,..} = \frac{n!}{a!.b!.c!...}}$$

iii. Permutasi siklis

$$\boxed{{}_nP_{siklis} = (n-1)!}$$

c. Kombinasi (AB = BA)

Penyusunan unsur-unsur tanpa memperhatikan urutan.

$$C_r^n = {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

2. Peluang Suatu Kejadian

a. Peluang suatu kejadian

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},\ 0 \le P(A) \le 1$$

n(A) = banyaknya kejadian A yang diharapkan muncul

n(S) = banyaknya anggota ruang sampel

b. Frekuensi harapan

$$\boxed{Fh = n \times P(A)}$$

n = banyaknya percobaan yang dilakukan

c. Komplemen peluang suatu kejadian

$$\boxed{P(A^C) = 1 - P(A)}$$

A^C = Himpunan kejadian bukan kejadian A

3. Peluang Kejadian Majemuk

a. Operasi gabungan (∪): "atau"

i. Kejadian saling lepas ($A \cap B = \phi$)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ii. Kejadian tidak saling lepas ($A \cap B \neq \phi$)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b. Operasi irisan (∩): "dan"

i. Kejadian saling bebas
$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

ii. Kejadian bersyarat
$P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$

4. Ukuran Pemusatan Data Statistik

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">Rumus</th></tr>
<tr><th>Data Tunggal</th><th>Data Kelompok</th></tr>
<tr><td rowspan="3">MEAN (RERATA / RATA-RATA HITUNG)</td><td rowspan="3">$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$</td><td>1) $\overline{X} = \frac{\sum f_i.X_i}{\sum f_i}$</td></tr>
<tr><td>2) $\overline{X} = \overline{X_s} + \frac{\sum f_i.d_i}{\sum f_i}$
$d_i = X_i - \overline{X_s}$

$\overline{X_s}$ = rata-rata sementara</td></tr>
<tr><td>3) $\overline{X} = \overline{X_s} + \frac{\sum f_i.u_i}{\sum f_i}.p$
u_i = kode kelas (0, ±1, ±2, …)
p = panjang kelas</td></tr>
</table>

	Rata-rata gabungan: $\overline{X}_{gab} = \dfrac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2 + \ldots + n_r\overline{X}_r}{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}$	
MEDIAN	Untuk n ganjil: $M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$ Untuk n genap: $M_e = \dfrac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right)$	$M_e = T_b + \left(\dfrac{\frac{1}{2}n - f_k}{f}\right)p$ T_b = tepi bawah kelas median n = banyaknya data f_k = frekuensi kumulatif sebelum kelas median f = frekuensi kelas median p = panjang kelas
MODUS	nilai yang paling sering muncul dari suatu data.	$M_o = T_b + \left(\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$ T_b = tepi bawah kelas modus d_1 = selisih frek. kelas modus dengan kelas sebelumnya d_2 = selisih frek. kelas modus dengan kelas sesudahnya

5. Ukuran Letak Data Statistik

	Rumus	
	Data Tunggal	**Data Kelompok**
KUARTIL (Q_i)	untuk n ganjil: $Q_i = X_{\frac{i(n+1)}{4}}$ untuk n genap: $Q_i = X_{\frac{(i.n+2)}{4}}$	$Q_i = Tb_i + \left(\dfrac{\frac{i}{4}n - fk_i}{f_i}\right)p$ dengan: i = 1, 2, 3.
PERSENTIL (P_i)	$P_i = X_{\frac{i(n+1)}{100}}$	$P_i = Tb_i + \left(\dfrac{\frac{i}{100}n - fk_i}{f_i}\right)p$ dengan: i = 1, 2, 3, …, 99.

DESIL (D_i)	$D_i = X_{\frac{i(n+1)}{10}}$	$D_i = Tb_i + \left(\dfrac{\frac{i}{10}n - fk_i}{f_i} \right) p$ dengan: i = 1, 2, 3, …, 9.

6. Ukuran Penyebaran Data Statistik

	Rumus	
	Data Tunggal	**Data Kelompok**
Jangkauan	J = $X_{max} - X_{min}$	J = BA kelas akhir – BB kelas pertama
Rataan Kuartil (RK)	$RK = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$	Rataan Kuartil (RK)
Rataan Tiga (RT)	$RT = \frac{1}{4}(Q_1 + 2Q_2 + Q_3)$	Rataan Tiga (RT)
Jangkauan antar kuartil	$\mathbf{H = Q_3 - Q_1}$	Jangkauan antar kuartil/ Hamparan (H)
Jangkauan semi interkuartil	$Q_d = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$	Jangkauan semi interkuartil/ Simpangan kuartil (Q_d)
Simpangan Rata-rata (SR)	$SR = \dfrac{\sum \lvert X_i - \overline{X} \rvert}{n}$	$SR = \dfrac{\sum f_i \lvert X_i - \overline{X} \rvert}{\sum f_i}$
Simpangan Baku (S)	$S = \sqrt{\dfrac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}}$	$S = \sqrt{\dfrac{\sum f_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum f_i}}$
Varians/ Ragam (S^2)	$S^2 = \dfrac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}$	$S^2 = \dfrac{\sum f_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum f_i}$