Pembelajaran 5. Kalkulus

A. Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit sepihak
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit tak hingga
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kekontinuan limit
4. Menyelesaikan masalah menggunakan konsep turunan fungsi
5. Menyelesaikan masalah optimalisasi menggunakan konsep turunan fungsi
6. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan integral tertentu
7. Menggunakan konsep integral tertentu untuk menentukan luas bidang
8. Menggunakan konsep integral tertentu untuk menentukan luas benda putar

C. Uraian Materi

1. Limit Fungsi

Pengertian Limit Fungsi

$\mathrm{limit}_{x \to a} f(x) = L$ dimaknai bahwa kita dapat membuat $f(x)$ sangat dekat dengan L dengan cara mendekatkan nilai *x* terhadap *a.*

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar suatu titik (baik dari kiri maupun dari kanan titik itu), atau pada suatu titik tak hingga. Perhitungan nilai limit disekitar titik dapat dilakukan dengan pendekatan dari kiri (limit kiri) dan pendekatan dari kanan (limit kanan). Perhatikan contoh berikut:

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, tentukan nilai $f(x)$ untuk x mendekati 3 jika dihitung dengan pendekatan dari kiri (limit kiri) dan pendekatan dari kanan (limit kanan).

Penyelesaian:

Pendekatan dari kiri (limit kiri) :

X	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,95	2,99	2,999	….	→ 3
$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	5,95	5,99	5,999	….	→ 6

Dari tabel tersebut terlihat bahwa jika x mendekati 3 (didekati dari kiri), maka nilai $f(x)$ mendekati 6,

Pendekatan dari kanan (limit kanan) :

x	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001	….	→ 3
$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$	6,5	6,4	6,3	6,2	6,1	6,01	6,001	6,0001	….	→ 6

Dari tabel tersebut terlihat bahwa jika x mendekati 3 (didekati dari kanan), maka f (x) mendekati 6,

Sehingga dapat ditulis bahwa : $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ = 6 (baik dari kiri maupun dari kanan)

Catatan :

a. Nilai limit ada jika nilai limit kiri sama dengan limit kanan.

b. Nilai limit tidak ada jika nilai limit kiri tidak sama dengan nilai limit kanan.

Limit fungsi di titik tak hingga (~)

Untuk memberikan gambaran perhatikan contoh berikut :

Diketahui fungsi $f(x)=\frac{1}{x}$, tentukan nilai fungsi f(x) untuk x mendekati tak hingga

(x → ~).

Jawab :

x	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	….	→ ~
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	0,1	0,1	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	….	→ 0

Dari tabel terlihat bahwa jika x mendekati tak hingga, maka nilai f(x) mendekati 0, dan dapat ditulis : $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Limit Fungsi Aljabar

Nilai limit sebuah fungsi dapat dihitung dengan cara subtitusi langsung terhadap variabelnya. Jika hasil perhitungan dengan subtitusi langsung didapat bilangan bentuk tak terdefinisikan, yaitu bentuk : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ atau $\infty - \infty$ perhitungan nilai limit harus dengan cara lain, misalnya pemfaktoran, penyederhanaan, dikalikan sekawannya dll.

Contoh:

Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 2}{3x^2 + 4x - 5}$

Penyelesaian :

Penyelesaian dengan substitusi akan mendapatkan bilangan tidak tentu bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ selanjutnya dibagi dengan variable pangkat tertinggi, menjadi;

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5x^2 - 2}{x^2}}{\frac{3x^2 + 4x - 5}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{5 - \frac{2}{\infty^2}}{3 + \frac{4}{\infty} - \frac{5}{\infty^2}} = \frac{5 - 0}{3 + 0 - 0} = \frac{5}{3}$$

Sifat-sifat limit fungsi

Untuk menyelesaikan permasalahan limit dengan menggunakan beberapa sifat limit berikut :

a. $\lim_{x \to a} k = k$ (dengan a dan k suatu konstanta)

b. $\lim_{x \to a} x = a$

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

d. $\lim_{x \to a} k.f(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$

e. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (jika f dan g fungsi dari x dan a = konstanta)

f. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (jika f dan g fungsi dari x dan a = konstanta)

g. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ dengan $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

h. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

i. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ dengan catatan $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0$ untuk n bilangan genap

2. Turunan Fungsi

Laju perubahan rata-rata nilai fungsi *f*(x) atau derivatif fungsi atau biasa disebut turunan fungsi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Jika limit tersebut ada untuk x = a, dikatakan bahwa *f'*(*a*) ***diferensial atau turunan*** *f*(*x*) terhadap x untuk x = *a*.

Notasi untuk menyatakan turunan fungsi dari *y* = *f(x)* dapat menggunakan salah satu

berikut ini : *y'* atau $\frac{dy}{dx}$ atau *f '(x)* atau $\frac{df}{dx}$

Contoh:

Tentukan turunan fungsi *f(x)* = 3x² – 2x + 2 dengan menggunakan definisi turunan

Penyelesaian :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left\{3(x+h)^2-2(x+h)+2\right\}-\left\{3x^2-2x+2\right\}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-2x-2h+2-3x^2+2x-2}{h}$$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} 6x + 3h - 2$ dengan substitusi akan didapat

$f'(x) = 6x - 2$

Rumus Rumus Turunan Fungsi Aljabar

Dari rumus definisi di atas dapat kita temukan rumus-rumus turunan fungsi aljabar sebagai berikut :

1. jika $f(x) = k$, maka $f'(x) = 0$ untuk k = konstanta
2. Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$
3. Jika $f(x) = a.x^n$, maka $f'(x) = na.x^{n-1}$, untuk *a* dan *n* $\in$ real
4. Jika $f(x) = k.u$, maka $f'(x) = k.u'$ di mana *u* adalah fungsi dalam x
5. Jika $f(x) = u \pm v$, maka $f'(x) = u' \pm v'$, di mana *u* dan *v* masing-masing fungsi dalam x
6. Jika $f(x) = u.v$, maka $f'(x) = u'.v + u.v'$, di mana *u* dan *v* masing-masing fungsi dalam x
7. Jika $f(x) = \frac{u}{v}$, maka $f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$, di mana *u* dan *v* masing-masing fungsi dalam x

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini :

a. *f(x)* = 3.√x

b. *f(x)* = 3x²

Penyelesaian :

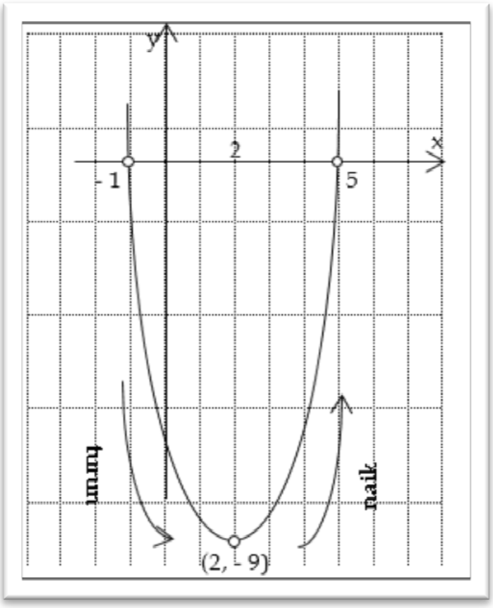
a. $f(x) = 3x^2$, maka berdasar sifat ke-3 $f'(x) = 6x$

b. $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$, maka berdasar sifat ke-3 $f'(x) = 3.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Suatu fungsi f(x) yang terdefinisi dalam suatu interval dapat dikatakan fungsi naik atau turun dengan hasil turunan pertamanya, yaitu sebagai berikut :

a. Fungsi f(x) naik jika f ’(x) > 0
b. Fungsi f(x) turun jika f ’(x) < 0



Contoh 2 :

Diketahui fungsi f(x) = x^2 - 4x – 5 Tentukan interval x ketika fungsi f(x) naik dan fungsi f(x) turun.

Penyelesaian :

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 > 0$

$2x > 4$

$x > 2$

fungsi *f(x)* naik pada interval x > 2

$f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 < 0$

$2x < 4$

$x < 2$

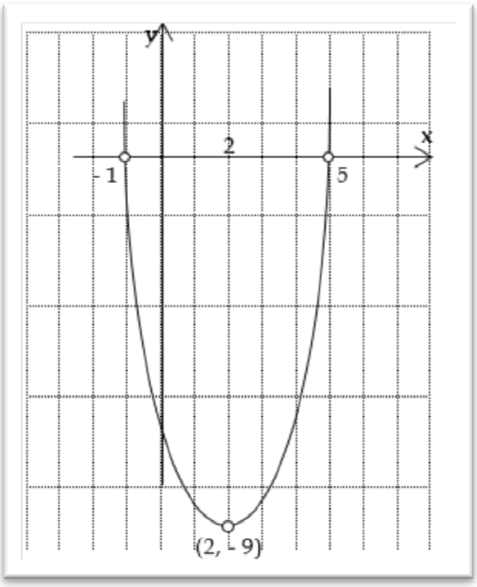
Fungsi *f(x)* turun pada interval x < 2

Perhatikan gambar di samping

Nilai Stasioner dan Titik Stasioner

Jika sebuah fungsi *y = f(x)* kontinu dan diferensiabel di *x = a* dan *f '(a) = 0,* maka *f(a)* merupakan nilai stationer *f(x)* di x = a. Titik *P(a, f(x))* yang terletak pada grafik fungsi *y = f(x)* disebut sebagai titik stationer atau titik ekstrem atau titik kritis. Nilai x yang menyebabkan *f(x)* mempunyai nilai stationer dapat ditentukan dari syarat *f '(x) = 0.*

Contoh:
Tentukan titik stationer dan nilai staionernya jika diketahui fungsi f(x) = x^2 - 4x – 5 **Penyelesaian :**



f(x) = $x^2 - 4x - 5$

f '(x) = 2x – 4 syarat stasioner adalah *f '(x)* = 0

2x – 4 = 0

2x = 4

x = 2

untuk x = 2 diperoleh $f(2) = 2^2 - 4.2 - 5 = -9$

jadi titik stasionernya adalah (2, - 9)

dengan nilai stasioner = - 9

3. Integral

Jika fungsi y = F (x) kontinu pada domain Df, sedemikian hingga $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$, maka

a. untuk mencari $F'(x) = f(x)$ digunakan operasi turunan fungsi atau derivative (hitung defferensial).

b. Untuk mencari y = F (x) digunakan operasi anti turunan atau anti derivative atau lebih lazim disebut hitung integral.

Jadi hitung integral adalah kebalikan (invers) dari hitung defferensial.

Integral fungsi aljabar

$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, dengan n ≠ - 1

Contoh:

Selesaikan pengintegralan berikut : $\int 5x^2 \, dx$

Penyelesaian:

$$\int 5x^2 dx = \frac{5}{3} x^3 + C = \frac{5}{3} x^3 + C$$

Penerapan Integral pada geometri

Gradient garis singgung kurva di sembarang titik A (x, y) adalah turunan pertama dari fungsi adalah $m = \frac{dy}{dx} = F'(x)$, sehingga untuk menentukan fungsi (F (x)) yang diketahui gradient di titik A (x, y) pada grafik fungsi, ditentukan dengan menggunakan hitung integral.

Contoh:

Gradien garis singgung kurva di setiap titik adalah 2x. Jika kuva melalui titik (3, 3). Tentukan pesamaan kurva tersebut!

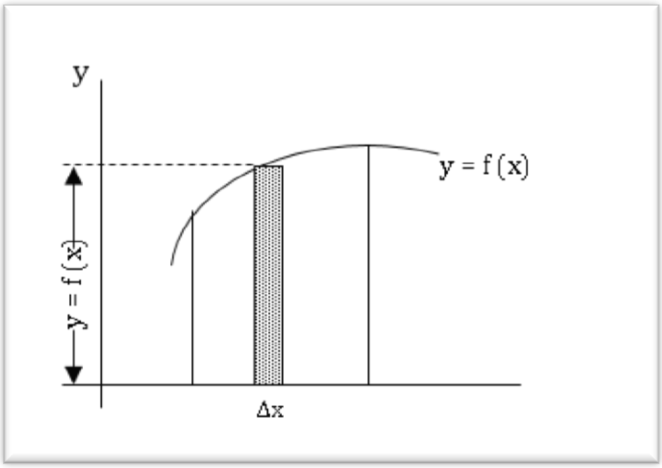
Penyelesaian ;

y = $\int F'(x) dx$ = $\int 2x d$ x = x^2 + C

Kurva melalui titik (3, 3) berarti; C = -6

Jadi , persamaan kurva yang dimaksud adalah y = $x^2 - 6$

Menghitung Luas Daerah di Bawah Kurva y = f(x), Sumbu x, garis x = a dan garis x = b



Luas persegipanjang berarsir = f (x) . Δx. Maka luas daerah yang dibatasi oleh fungsi f(x), garis x = a dan x = b, dengan cara menjumlah luas persegipanjang kecil-kecil itu di sepanjang y = f (x). Jika Δx mendekati 0 maka luasnya :

L = $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x) \Delta x$ atau : L = $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx$

Contoh:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = $x^2 - 4$ dan sumbu-x !

Penyelesaian :

$$L = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx$$

$$= -\left[\tfrac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\left[(\tfrac{1}{3}.2^3 - 4.2) - (\tfrac{1}{3}.(-2)^3 - 4(-2))\right]$$

$$= -\left[(\tfrac{8}{3} - 8) - (-\tfrac{8}{3}. + 8)\right]$$

$$= -\left[\tfrac{8}{3} - 8 + \tfrac{8}{3} - 8\right]$$

$= -\left[\frac{16}{3} - 16\right]$

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva y_1 = f(x) dan y_2 = g(x) pada interval $a \le x \le b$ dengan

f(x) > g(x) dapat ditentukan dengan rumus : L = $\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$

D. Rangkuman

1. Limit Fungsi Aljabar

a. Limit fungsi f(x) untuk x $\to$ a

Ditulis: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

artinya, jika x mendekati nilai a maka f(x) mendekati nilai L.

Untuk menentukan nilai limit suatu fungsi f(x) gunakan cara substitusi, yaitu dengan mengganti nilai x pada fungsi f(x) dengan nilai a. Jika hasilnya $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$ / $\infty \pm \infty$, maka langkah-langkah untuk menentukan nilai limit fungsi tersebut yaitu dengan cara:

- f(x) difaktorkan/ dikali sekawan akar, kemudian
- f(x) disederhanakan dengan menghilangkan salah satu faktor dari pembilang dan penyebut, dan
- substitusi kembali nilai x = a terhadap fungsi f(x) tersebut.

b. Limit fungsi f(x) untuk x $\to \infty$

$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$

Terdapat dua bentuk limit:

i. Limit fungsi bentuk $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Untuk menentukan nilai limit fungsi bentuk di atas, yaitu dengan cara dibagi oleh variabel pangkat tertinggi dari pembilang (f(x)) atau penyebut (g(x)).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = L$$

- Jika m > n maka L = ∞

- Jika m < n maka L = 0
- Jika m = n maka $L = \frac{a_m}{b_n}$

ii. limit fungsi bentuk $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x)$

Untuk menentukan nilai limit fungsi bentuk di atas, pertama fungsi tersebut dikali sekawan akar $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$ agar terbentuk fungsi rasional. Kemudian fungsi tersebut dibagi oleh variabel pangkat tertinggi dari pembilang atau penyebutnya seperti limit fungsi bentuk pertama.

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r} = L$

- Jika a > p maka L = $+\infty$
- Jika a < p maka L = $-\infty$
- Jika a = p maka $L = \frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

2. Limit Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus dasar untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri adalah sebagai berikut :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
9. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$

3. Rumus Dasar Turunan

Secara definitive fungsi turunan dapat dirumuskan sebagai berikut ;

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4. Turunan Fungsi Aljabar

Rumus-rumus turunan:

No	Fungsi (f(x))	Turunan (f'(x))
1	$f(x) = ax^n$	$f'(x) = n.ax^{n-1}$
2	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
3	$f(x) = U \pm V$	$f'(x) = U' \pm V'$
4	$f(x) = U^n$	$f'(x) = nU^{n-1}. U'$
5	$f(x) = U. V$	$f'(x) = U'. V + U. V'$
6	$f(x) = \dfrac{U}{V}$	$f'(x) = \dfrac{U'.V - U.V'}{V^2}$

5. Turunan Fungsi Trigonometri

No	Fungsi (f(x))	Turunan (f'(x))
1	f(x) = sin x	f'(x) = cos x
2	f(x) = cos x	f'(x) = –sin x
3	f(x) = tan x	$f'(x) = \sec^2 x$
4	f(x) = cotan x	$f'(x) = -\text{cosec}^2\, x$
5	f(x) = sec x	f'(x) = sec x. tan x
6	f(x) = cosec x	f'(x) = – cosec x. cotan x
7	f(x) = sin ax	f'(x) = a cos ax

8	f(x) = cos ax	f'(x) = –a sin ax
9	f(x) = sin U	f'(x) = U' cos U
10	f(x) = cos U	f'(x) = –U' sin U

6. Aplikasi Turunan

a. Persamaan Garis Singgung

Bentuk umum persamaan garis singgung dinyatakan dalam bentuk umum:

- $y = mx + c$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$

dengan gradien (m) dapat ditentukan melalui turunan pertama fungsi f(x) yang disinggung oleh garis tersebut. maka: $\boxed{m = f'(x)}$

rumus lain dari gradien (m):

1. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3. Kedudukan dua buah garis: i) 2 garis sejajar ($m_1 = m_2$) ii) 2 garis saling tegak lurus ($m_1 . m_2 = -1$)
2. m = tan α	

b. Fungsi Naik dan Turun

syarat suatu fungsi f(x) naik: **f '(x) > 0**

syarat suatu fungsi f(x) turun: **f '(x) < 0**

c. Titik Stasioner (maksimum/ minimum)

Titik stasioner suatu fungsi f(x) ditentukan melalui:

f '(x) = 0

d. Titik Belok

Titik belok suatu fungsi f(x) ditentukan melalui:

f '' (x) = 0

7. Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

$\int a\, dx = ax + c$	$\int k.f(x)\, dx = k\int f(x)dx$
$\int ax^n\, dx = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$	$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

8. Integral Tak Tentu fungsi Trigonometri

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int \sec x . \tan x\, dx = \sec x + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int \operatorname{cosec} x . \operatorname{cotan} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$	$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$
$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotan} x + c$	$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$

9. Teknik Pengintegralan

a. Metode substitusi

$$\int U^n\, dx = \frac{1}{n+1} U^{n+1} + c$$

Rumus khusus integral substitusi:

$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} . \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1} + c$	$\int \sin^n ax . \cos ax\, dx = \frac{1}{a} . \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} ax + c$
$\int V . U^n dx = \frac{V}{U'} . \frac{1}{n+1} U^{n+1} + c$	$\int \cos^n ax . \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} . \frac{1}{n+1} \cos^{n+1} ax + c$

b. Metode parsial

$$\int U\, dv = U.V - \int V\, du$$

10. Integral Tentu

Rumus dasar integral tentu:

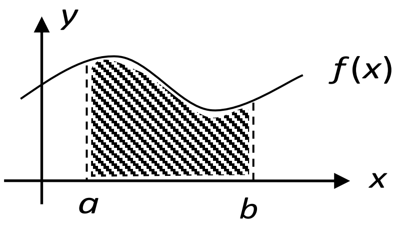
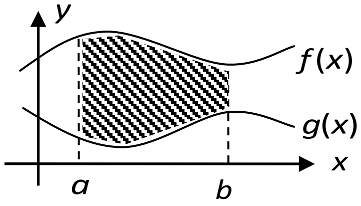
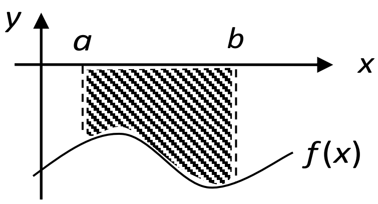
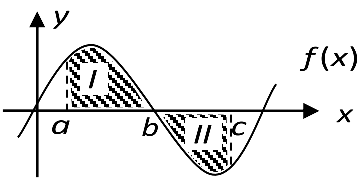
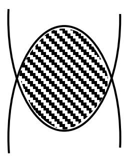
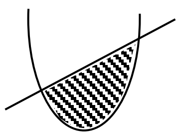
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

sifat integral tentu:

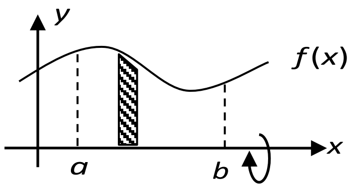
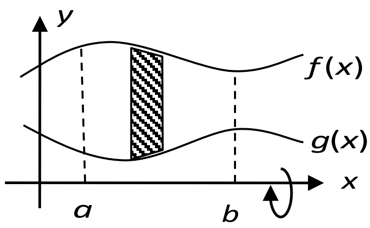
$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$	$\int_a^b f(x) \pm g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
$\int_a^b k.f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$	$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

11. Aplikasi Integral

a. Integral Luas

	$$L=\int_a^b f(x)\ dx$$
	$$L=\int_a^b f(x)-g(x)\ dx$$
	$$L=-\int_a^b f(x)\ dx=\int_b^a f(x)\ dx$$
	$L=L_I+L_{II}$ $=\int_a^b f(x)\ dx-\int_b^c f(x)\ dx$
 	Luas daerah yang di batasi oleh fungsi kuadrat-kuadrat dan fungsi kuadrat-linear dapat digunakan rumus khusus sbb: $\boxed{L=\frac{D\sqrt{D}}{6a^2}}$ dengan D = b^2 – 4ac

b. Volume Benda Putar

	Benda diputar terhadap sumbu x: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ Benda diputar terhadap sumbu y: $V = \pi \int_c^d f(y)^2 dy$
	Benda diputar terhadap sumbu x: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$ Benda diputar terhadap sumbu y: $V = \pi \int_c^d f(y)^2 - g(y)^2 dy$