Pembelajaran 4. Geometri dan Trigonometri

A. Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geomteri datar
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geometri ruang
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geometri transformasi
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan trigonometri

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep segitiga
2. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep segiempat
3. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep lingkaran
4. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan kedudukan titik, garis dan bidang dalam ruang
5. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan jarak dalam ruang
6. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan sudut dalam ruang
7. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep pencerminan
8. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep translasi
9. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep rotasi
10. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep dilatasi
11. Menyelesaikan masalah sudut pada bidang datar dengan menggunakan identitas trigonometri
12. Menyelesaiakn masalah menggunakan konsep inver fungsi trigonometri
13. Menyelesaikan masalah trigonometri denganmmenggunakan rumus jumlah dan selisih fungsi trigonometri

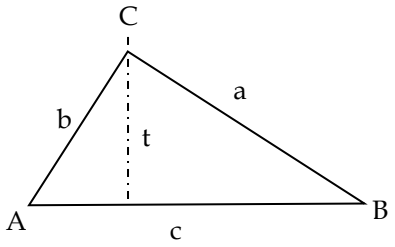
C. Uraian Materi

1. Geometri Datar

   a. Rumus Keliling dan Luas Bidang Segitiga

      K = a + b + c

      L = ½ . alas . tinggi



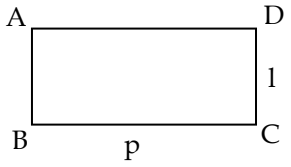
$L = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$

dimana $s = \frac{a+b+c}{2}$

Persegi panjang

K = 2 . (p + l)

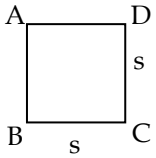
L = p . l



Bujur sangkar

K = 4. s

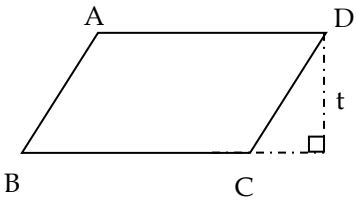
L = s . s = s^2



Jajar genjang

K = 2. (a + b)

L = a. t

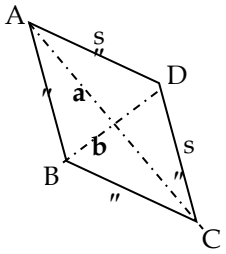


Belah ketupat

K = 4 . s

L = ½ . a . b

dimana : a dan b diagonal



Layang-layang

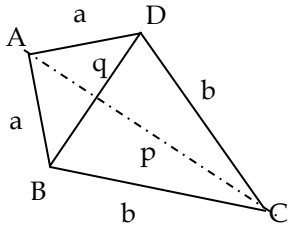
K = 2. (a + b)

L = ½ . p . q

dimana :

q = BD

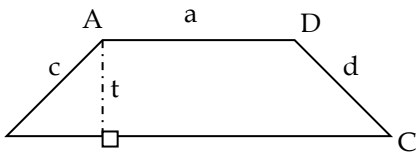
p = AC



Trapesium

K = a + b + c + d

L = ½ .(a + b) . t



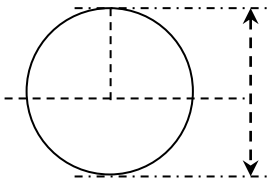
Lingkaran

K = 2.π . r

K = π . d ….. dimana 2.r = d

L = π . r ^{2}

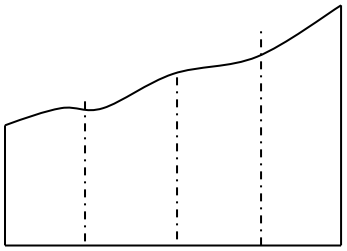
L = $\frac{1}{4}$.π . d ^{2} …… dimana r = ½ d



b. Taksiran Luas Daerah Bidang tak Beraturan

Aturan Trapesoida

Bangun daerah bidang tak beraturan dibagi menjadi beberapa bagian yang sama, disebut pilah. Satu bidang pilah ABQP luasnya mendekati trapesium dengan sisi sejajar O_1 dan O_2 serta jaraknya d.



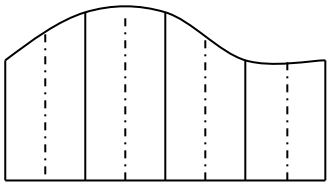
Luas pilah ABQP $\approx$ $d.\left(\frac{O_1 + O_2}{2}\right)$

Luas pilah BCRQ $\approx$ $d.\left(\frac{O_2 + O_3}{2}\right)$

Demikian seterusnya sehingga luas total merupakan jumlah masing-masing pilah, maka luas total dirumuskan :

Luas AETP $\approx$ $d.\left(\frac{O_1 + O_5}{2} + (O_2 + O_3 + O_4)\right)$

Aturan Mid-Ordinat



Seperti halnya aturan trapesoida, pada aturan ini diambil tengah-tengah dari masing-masing ordinat.

Luas pilah ABHG = d . m_1

Luas pilah BCIH = d . m_2

Demikian seterusnya sehingga luas total merupakan jumlah masing-masing pilah, maka luas total dirumuskan :

Luas AEKG = d . ($m_1 + m_2 + m_3 + m_4$)

Aturan Simpson

Aturan ini biasanya dipergunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva f(x) dengan sumbu-x pada interval tertentu [a , b].

Aturan Simpson dituliskan dalam rumus :

$$A = \frac{d}{3}.\{(F + L) + 4.E + 2R\}$$

dimana :

A : Luas daerah

d : Lebar pilah

F : Ordinat pertama

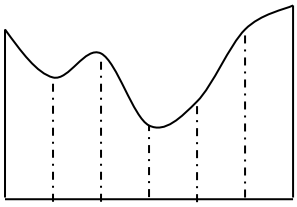
L : Ordinat terakhir

E : Jumlah ordinat bernomor genap

R : Jumlah ordinat bernomor ganjil

Contoh :

Hitunglah luas daerah di samping ini menggunakan aturan :



a. aturan trapesoida

b. aturan mid-ordinat

c. aturan Simpson

Jawab :

a. aturan trapesoida

$$L \approx d.\left(\frac{O_1 + O_5}{2} + (O_2 + O_3 + O_4)\right) \approx 2.\left\{\frac{8+9}{2} + (6+7+4+5+8)\right\}$$

$$\approx 2.\{8{,}5 + 30\} \approx 2 \,.\, 38{,}5$$

$\approx$ 77 satuan luas.

b. aturan mid-ordinat

$$L \approx d \,.\, (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6)$$

$$L \approx 2.\left(\frac{8+6}{2} + \frac{6+7}{2} + \frac{7+4}{2} + \frac{4+5}{2} + \frac{5+8}{2} + \frac{8+9}{2}\right)$$

$$\approx 2.\ (7 + 6{,}5 + 5{,}5 + 4{,}5 + 6{,}5 + 8{,}5) \approx 2.\ (38{,}5)$$

$\approx$ 77 satuan luas

c. aturan Simpson

$$L \approx \frac{d}{3}.\{(F + L) + 4.E + 2R\} \approx \frac{2}{3}.\{(8+9) + 4.(6+4+8) + 2.(7+5)\}$$

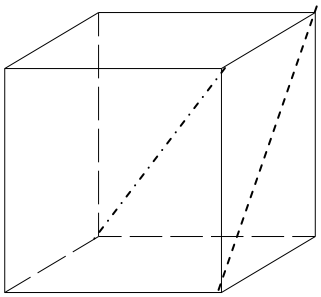
$$\approx \frac{2}{3}.(17 + 72 + 24) \approx \frac{2}{3}.113 \approx \frac{226}{3}$$

$\approx$ 75,3 satuan luas

2. Geometri Ruang

Kubus

Kubus adalah bangun ruang yang dibatasi enam buah sisi persegi, berbentuk bujur sangkar yang kongruen. Perhatikan gambar 1 berikut ini.



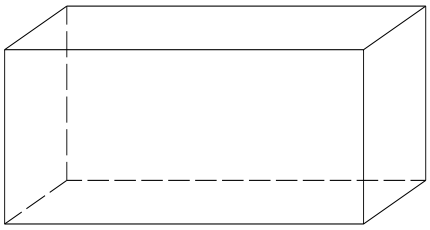
Keterangan :

- AB = BC = CG disebut rusuk (s)
- ABCD, ABFE, BCGF disebut sisi

  Jadi bangun kubus mempunyai :
- 12 rusuk yang sama panjang
- 6 buah sisi yang berbentuk persegi
- Tiap sisi luasnya = $\mathbf{s}^{2}$ satuan luas.
- Total luas permukaan kubus = $\mathbf{6 \cdot s^{2}}$
- Diagonal sisi = $\mathbf{s\sqrt{2}}$ (contoh diagonal BG)
- Diagonal ruang = $\mathbf{s\sqrt{3}}$ (contoh diagonal DF)

Balok

Balok adalah bangun ruang yang dibatasi oleh enam buah sisi yang berbentuk persegi panjang. Perhatikan gambar 2 berikut ini.



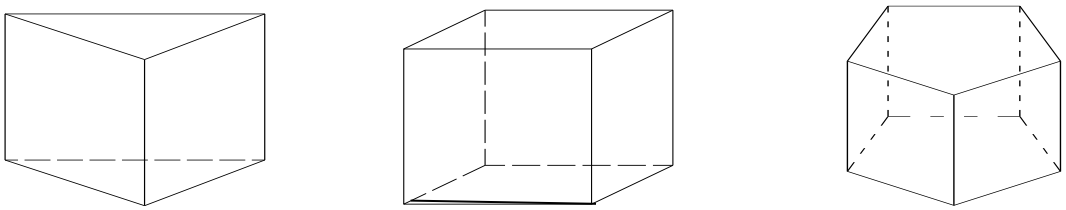
Balok ABCD.EFGH dengan rusuk panjang p, lebar l dan tinggi t.

Balok mempunyai :

- 12 rusuk (AB, CD, EF, GH, BC, FG, dll)
- 6 buah sisi yang berbentuk persegi panjang.
- Luas Permukaaan = L = 2(p.l + p.t + l.t)
- Volume = V = p.l.t

Prisma

Prisma adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang **segi n yang beraturan** dan sejajar (bidang alas dan bidang atas) dan beberapa bidang lain (bidang sisi tegak) yang potong-memotong menurut garis-garis sejajar. Perhatikan gambar 3 di bawah ini.

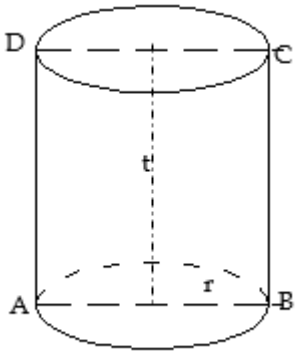


Keterangan :

- Bidang ABC (i), bidang ABCD (ii) dan bidang ABCDE disebut bidang alas.
- Bidang DEF (i), bidang EFGH (ii) dan bidang FGHIJ disebut bidang atas.
- Bidang ABED (i), bidang ABFE (ii), bidang ABGF dan bidang lain yang sesuai bidang tersebut disebut bidang sisi tegak.
- Garis-garis AB, BC, dan lainnya disebut rusuk.
- Luas Permukaan = 2. L alas + L selimut prisma
- Volume = L alas x t

Tabung

Tabung adalah prisma tegak beraturan yang bidang alasnya berupa segi n beraturan dengan n tak terhingga (berupa lingkaran). Perhatikan gambar 4 berikut ini.



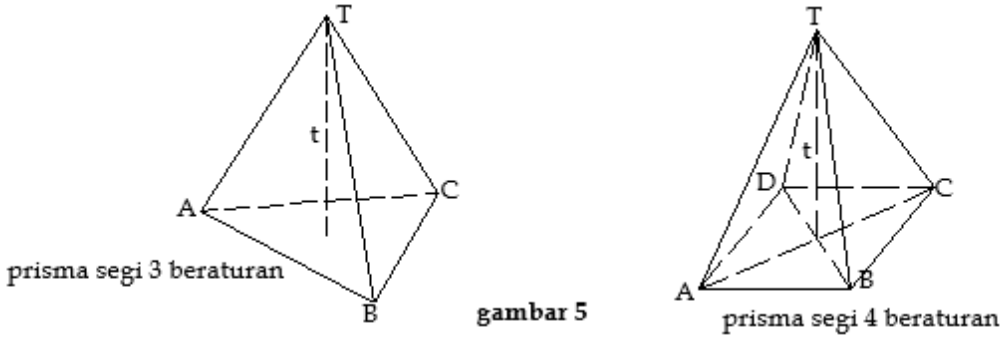
gambar 4

Keterangan :

- AC dan BD disebut garis pelukis.
- AB dan CD disebut diameter bidang alas dan bidang alas
- Jari-jari lingkaran alas = r
- Tinggi tabung = t
- Luas permukaan = $2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r\ (r + t)$
- Volume = $\pi r^2 t$

Limas Beraturan

Limas adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah segi n beraturan (bidang alas) dan bidang sisi tegak yang berbentuk segitiga sama kaki yang alasnya sisi-sisi n, sedangkan puncaknya berimpit. Perhatikan gambar 5 berikut ini.



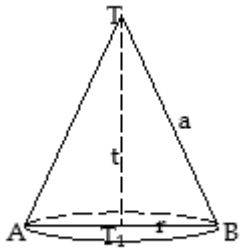
gambar 5

Keterangan :

- ABC dan ABCD disebut bidang alas.
- TAB,TBC dan bidang yang sesuai disebut sisi tegak.
- Luas permukaan = L alas + L selimut limas
- Volume $= \frac{1}{3}$ L alas x t

Kerucut

Kerucut adalah limas beraturan yang bidang alasnya segi n beraturan dengan n tak terhingga (berbentuk lingkaran). Kerucut mempunyai 2 sisi yaitu alas dan bidang lengkung. Perhatikan gambar 6 berikut ini.



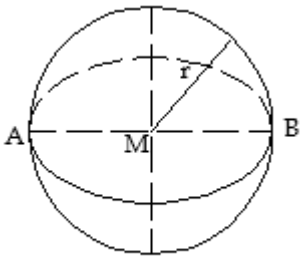
gambar 6

Keterangan :

- TT_1 : tinggi kerucut (t)
- AB : diameter alas dengan jari-jari r
- AT dan BT : garis pelukis/apotema (a) dengan hubungan : $\mathbf{a^2 = t^2 + r^2}$
- Luas permukaan = πr (r + s) dengan: $s = \sqrt{r^2 + t^2}$
- $Volume = \frac{1}{3}\pi r^2 x t$

Bola

Bola adalah bangun ruang yang dibatasi oleh bidang lengkung saja, yang terjadi jika bangun setengah lingkaran diputar pada garis tengahnya (lihat gambar 7).



gambar 7

Keterangan :

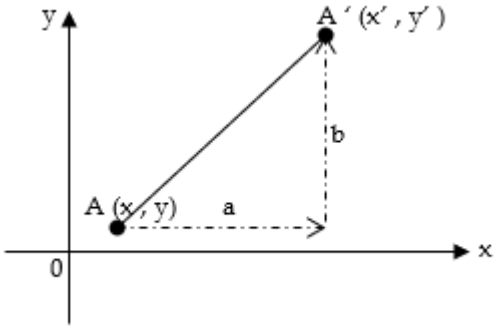
- M : titik pusat bola
- AB : d = diameter bola
- r : jari-jari bola
- Luas permukaan = $4\pi r^2$
- $Volume = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. Transformasi Geometri

Transformasi dapat dipandang sebagai pemetaan dari himpunan titik ke himpunan titik. Biasanya titik yang dipetakan adalah (x,y), titik hasil pemetaan/bayangannya adalah (x',y'). Beberapa jenis transformasi yang akan kita pelajari antara lain :

a. Translasi (penggeseran)

Suatu transformasi disebut translasi/penggeseran jika setiap titik dipindahkan sepanjang ruas garis tertentu, dengan pengertian sepanjang ruas sejajar sumbu x (a) dan sepanjang ruas sejajar sumbu y (b).



Jika suatu titik A (x , y) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan titik A' (x',y'), dengan x' = x + a dan y' = y + b maka titik A' (x+a , y+b)

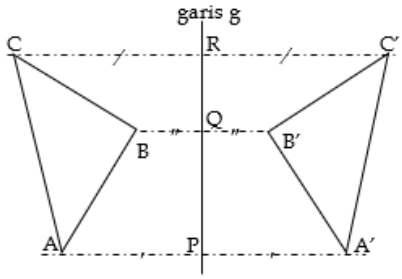
Contoh : Jika titik A (6,7) ditranslasi T $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kemudian ditranslasi T $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka titik hasil translasi adalah …

Jawab : A' = (6 +2 – 3 , 7 + 3 + 4) maka hasil translasi adalah A' (5,14)

b. Refleksi (pencerminan)

Suatu refleksi ditentukan oleh suatu garis yang dijadikan sebagai sumbu pencerminan. Segitiga ABC dicerminkan terhadap garis g menghasilkan segitiga A'B'C', maka :

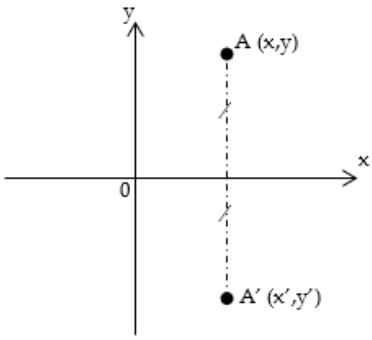
AP = PA'
BQ = QB'
CR = RC'



b.1. Pencerminan terhadap sumbu x

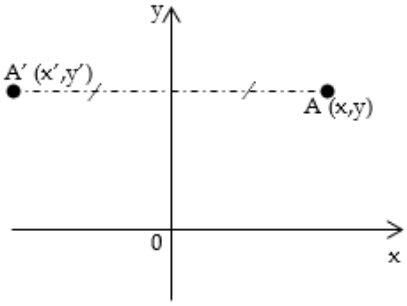
Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu x dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **sumbu x** adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



b.2. Pencerminan terhadap sumbu y

Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan

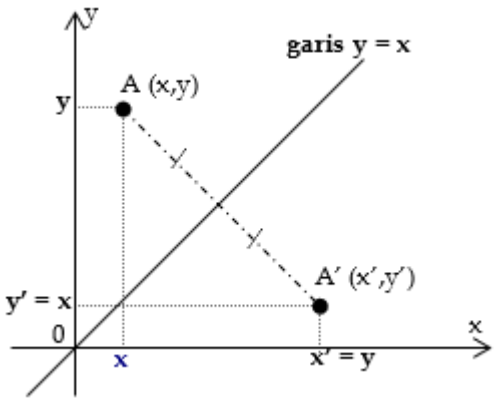


: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **sumbu y** adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b.3. Pencerminan terhadap garis y = x

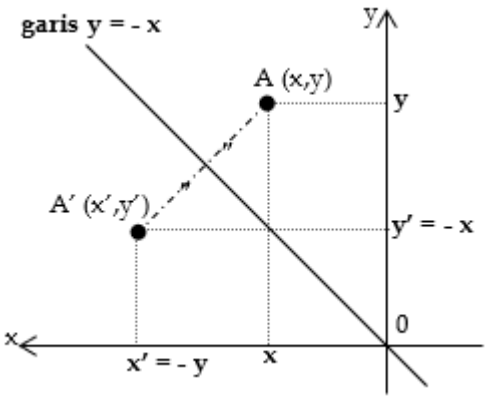
Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **garis y = x** adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b.4. Pencerminan terhadap garis y = - x

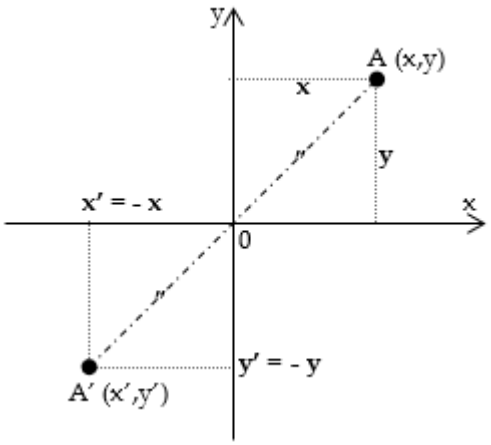
Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan thd **garis y = - x** adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b.5. Pencerminan terhadap titik asal O (0,0)

Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **titik O** adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Contoh : Diketahui segitiga PQR dengan titik sudut P (-3,2), Q (-5,5) dan R (-1,4). Tentukan bayangan segitiga PQR akibat :

a. pencerminan terhadap sumbu x

b. pencerminan terhadap sumbu y

Jawab : Terhadap sumbu x Terhadap sumbu y

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad Q' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$R' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad R' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

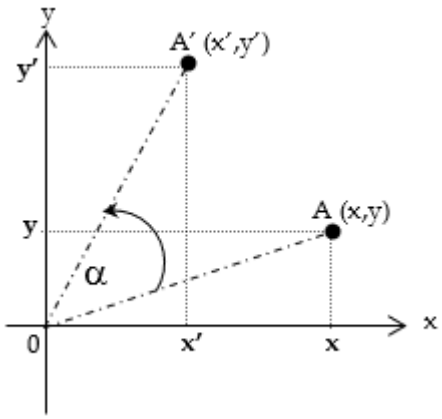
Jadi titik-titik pencerminannya adalah :

a. terhadap sumbu x : P' (-3,-2), Q' (-5,-5), dan R' (-4,-4)

b. terhadap sumbu y : P' (3,2), Q' (5,5) dan R' (1,4)

c. Rotasi

Suatu rotasi ditentukan oleh pusat rotasi dan besar sudut rotasi. Rotasi dengan pusat O (0,0) dan besar sudut α dituliskan dalam R [O, α].



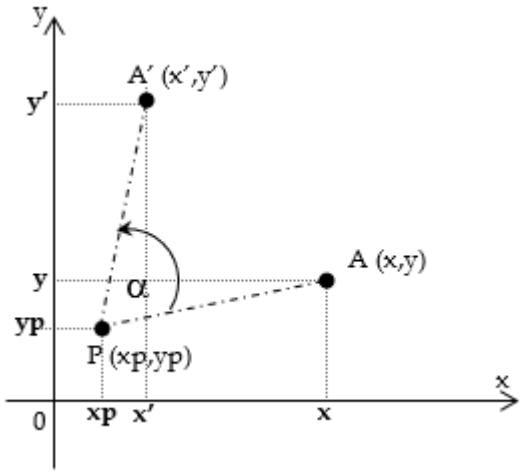
Titik A (x,y) dirotasikan dengan rotasi R [O, α] menghasilkan titik A' (x',y'). Dengan memperhatikan gambar disamping diperoleh hubungan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dengan demikian didapatkan :

x ' = x . cos α - y . sin α

y ' = x . sin α + y. cos α

Titik A (x,y) dirotasikan dengan rotasi R [P, α] menghasilkan titik A' (x',y'), dimana berpusat di titik P (xp,yp).



$$\begin{pmatrix} x'-xp \\ y'-yp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-xp \\ y-yp \end{pmatrix}$$

Dengan demikian didapatkan :

x ' = {(x - xp) . cos α - (y - yp) . sin α } – xp

y ' = {(x – xp). sin α + (y – yp) . cos α} - yp

Contoh : Tentukan bayangan titik A (4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat O dan dengan titik pusat P (1,2) !

Jawab : Rotasi dengan titik pusat O

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^o & -\sin 90^o \\ \sin 90^o & \cos 90^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Rotasi dengan titik pusat P (1,2)

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^o & -\sin 90^o \\ \sin 90^o & \cos 90^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \end{pmatrix}$$

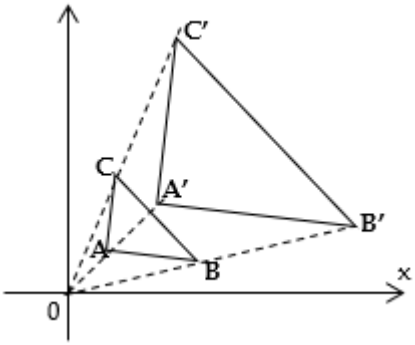
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ 3+2 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik A (4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat O adalah A' (-5,4), sedangkan bayangan titik A (4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat P (1,2) adalah A' (-2,5).

d. Dilatasi (perkalian)

Suatu dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor skala (faktor perkalian). Dilatasi dengan pusat O (0,0) dan faktor skala k , dirumuskan dengan [O , k].



Segitiga ABC didilatasi dengan titk pusat O dan faktor skala k menghasilkan A'B'C' hal ini didapatkan hubungan :

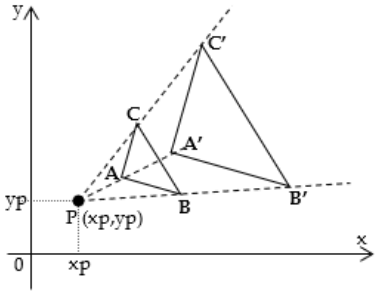
x ' = k . x

y ' = k . y

Dengan menggunakan matriks bayangan titik yang di-dilatasi dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika titik A (x,y) didilatasikan dengan titik pusat P (xp , yp) dan faktor skala k, menghasilkan titik A ' (x ',y ') seperti gambar di bawah ini



diperoleh hubungan:

$$\begin{pmatrix} x'-xp \\ y'-yp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-xp \\ y-yp \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x'-xp \\ y'-yp \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x-xp \\ y-yp \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.(x-xp)+xp \\ k.(y-yp)+yp \end{pmatrix}$$

Contoh : Tentukan bayangan titik A (6,8) karena dilatasi [O , 3] dan karena dilatasi [P, 4] dimana titik pusat P (2,1) !

Jawab : Dilatasi [O , 3]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Dilatasi [P , 4]

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 6-2 \\ 8-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4+2 \\ 4.7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 29 \end{pmatrix}$$

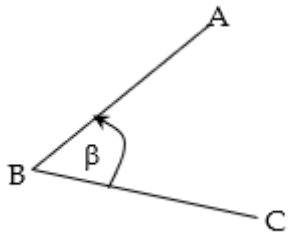
Jadi titik bayangan hasil dilatasi adalah :

A' (18,24) dan A' (18,29)

4. Ukuran sudut

Pengertian Sudut

Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua buah ruas garis dan satu titik



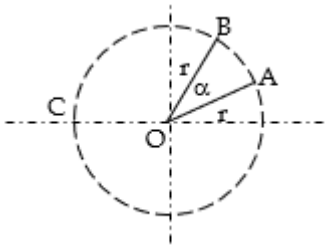
Dari gambar di samping disebut sudut B atau β atau sudut ABC (∠ ABC) dibatasi oleh dua buah ruas garis BA dan BC serta satu titik (sudut) B.

Macam-macam Satuan Sudut

Pada umumnya ukuran satuan sudut tergantung pada kepentingannya. Barang atau alat apa yang sedang dipergunakan, maka satuan sudut tertentu pula yang akan dipergunakan. Ada tiga (3) satuan sudut yang biasa digunakan saat ini, yaitu :

a. Satuan Derajat (….°)

Ukuran sudut satu putaran penuh adalah 360°, maka misalkan besar α adalah 1° dan apabila panjang busur AB = $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran, dengan kata lain satu derajat adalah $\frac{1}{360}$ putaran.



Ukuran sudut yang lebih kecil adalah menit (′) dan detik (″).
Hubungan antara derajat, menit dan detik adalah :

1° = 60′

1′ = 60 ″

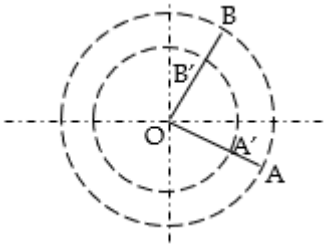
maka untuk 1° = 60′ = 3600 ″

b. Satuan Radian (rad)

Ukuran Radian disingkat rad.

Apabila busur AB sama dengan jari-jari lingkaran, maka dikatakan bahwa besar sudut tersebut satu radian.

Perhatikan gambar di bawah ini



$$\frac{\cap AB}{OA} = \frac{\cap A'B'}{OA'}$$

Perbandingan $\frac{\cap AB}{OA} = \frac{r}{r} = 1$, menunjukkan ukuran sudut AOB.

Nilai bilangan itu disebut ukuran radian.

Busur ABC adalah bangun setengah lingkaran π r , sehingga :

$\frac{\text{Busur ABC}}{OA} = \frac{\pi.r}{r} = \pi\,\text{rad}$, maka $\angle$ AOC = π rad.

c. Satuan Centisimal/gon/grade

Ukuran ini dilambangkan dengan …..g atau grad. (gradien)

Besar sudut disebut 1 gon apabila panjang busur AB = $\frac{1}{400}$ keliling lingkaran, maka :

$$1 \text{ gon} = \frac{1}{400}\ 2.\pi\text{rad} = \frac{1}{200}\pi \text{ rad.}$$

Konversi Satuan Sudut

Hubungan : 1 putaran = 360° = 2.π rad = 400 g

Maka : π rad = 180 ° = 200 g

Berdasarkan hubungan di atas maka akan didapatkan konversi sebagai berikut :

a. Mengubah radian ke derajat (konversi 1)

π rad = 180°

1 rad = $\frac{180^o}{\pi}$, apabila π = 3,14 maka diperoleh :

1 rad = 57° 17′ 44″

b. Mengubah radian ke gon (konversi 2)

π rad = 200 g

1 rad = $\frac{200}{\pi}$g , apabila π = 3,14 maka diperoleh :

1 rad = 63,69 g

c. Mengubah derajat ke radian (konversi 3)

180° = π rad

1° = $\frac{\pi}{180}$rad , apabila π = 3,14 maka diperoleh :

1° = 0,017 rad

d. Mengubah gon ke radian (konversi 4)

200 g = π rad

1 g = $\frac{\pi}{200}$rad , apabila π = 3,14 maka diperoleh :

1 g = 0,016 rad

e. Mengubah derajat ke gon (konversi 5)

180° = 200 g

1° = $\frac{200}{180}$g

1° = 1,11 g

f. Mengubah gon ke derajat (konversi 6)

200 g = 180°

1 g = $\frac{180^o}{200}$

1 g = 0,9 °

Contoh :

1. 36,56° konversikan ke bentuk satuan derajat, menit dan detik !

Jawab : 36,56° = 36° + 0,56′

= 36° + $\frac{56}{100}$ x 60′

= 36° + 33,6′ = 36° + 33′ + 0,6′

= 36° + 33′ + $\frac{6}{10}$ x 60″ = 36° + 33′ + 36″

Jadi : 36,56° = 36° 33′ 36″

2. Konversikan 21,9 g ke bentuk satuan derajat !

Jawab : 21,9 g = 21,9 x 0,9

= 15,71°

3. Konverikan 5 rad ke bentuk satuan gon !

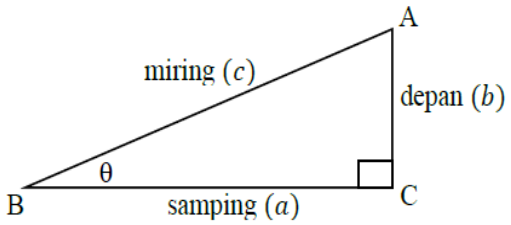
Jawab : 5 rad = 5 x 63,69 g

= 318,45 g

5. Fungsi trigonometri

Coba saudara ingat apa arti sudut siku-siku, sudut lancip, dan sudut tumpul. Dengan mengamati bangun-bangun yang ada di sekitar kita, dapatkah saudara menemukan bangun yang berbentuk segitiga siku-siku?

Gambarlah bangun segitiga siku-siku di kertas dan sebut ketiga titik sudutnya dengan huruf A, B dan C dan sudut siku-siku berada di C. Masih ingatkah saudara pengertian sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan dan cosecan suatu sudut lancip dalam segitiga siku-siku ABC (misalnya sin$\angle BAC$, cos$\angle BCA$)? Perhatikan Gambar 1.1.



$$\sin\theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} \Leftrightarrow \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} \Leftrightarrow \tan B = \frac{b}{a}$$

Gambar 1.1. Pendefinisian nilai sin, cos, dan tan suatu sudut dalam sebuah segitiga

Dari Gambar 1.1. diperoleh juga nilai-nilai trigonometri untuk sudut A yaitu

$$Sin\,A = \frac{a}{c}, Cos\,A = \frac{b}{c}, danTan\,A = \frac{a}{b}$$

Dapat dituliskan dengan

$$a = c.Sin\,A = c..Cos\,B = b.Tan\,A \;\; dan$$

$$b = c.Sin\,B = c.Cos\,A = a.\tan B$$

Definisi untuk nilai-nilai fungsi trigonometri lainnya diberikan pada Definisi 1.1.

Definisi 1.1

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Berdasarkan Gambar 1.1 dan Definisi 1.1, diperoleh

$c = a\ \csc A = a\sec B = b\csc B = b\sec A.$

Dari perolehan di atas, jika A dan B sudut segitiga dengan 0°<A,<90° dan A+B=90° maka sin$A$=cos$B$, cos$A$=sin$B$, tan$A$=cot$B$, dan cot$A$=tan$B$. Karena ABC merupakan segitiga siku-siku maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$. Dari sini diperoleh

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Untuk selanjutnya $(\sin A)^2$ dituliskan dengan $\sin^2 A$. Fungsi trigonometri lainnya juga menyesuaikan. Untuk 0°<A<90° berlaku

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad (1.1)$$

Persamaan (1.1) apabila kedua ruas dibagi dengan $\cos^2 A$ maka diperoleh

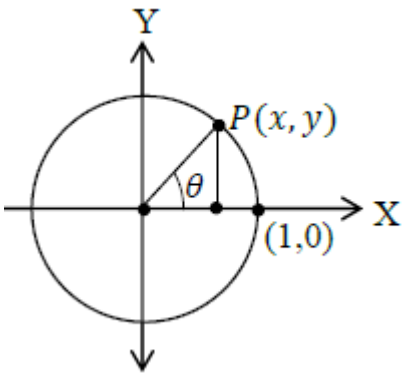
$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A \quad atau\ \sec^2 A - \tan^2 A = 1 \qquad (1.2)$$

Persamaan (1.1) apabila kedua ruas dibagi dengan $\sin^2 A$ maka diperoleh

$$1 + \cot^2 A + 1 = \csc^2 A \quad atau\ \csc^2 A - \cot^2 A = 1 \qquad (1.3)$$

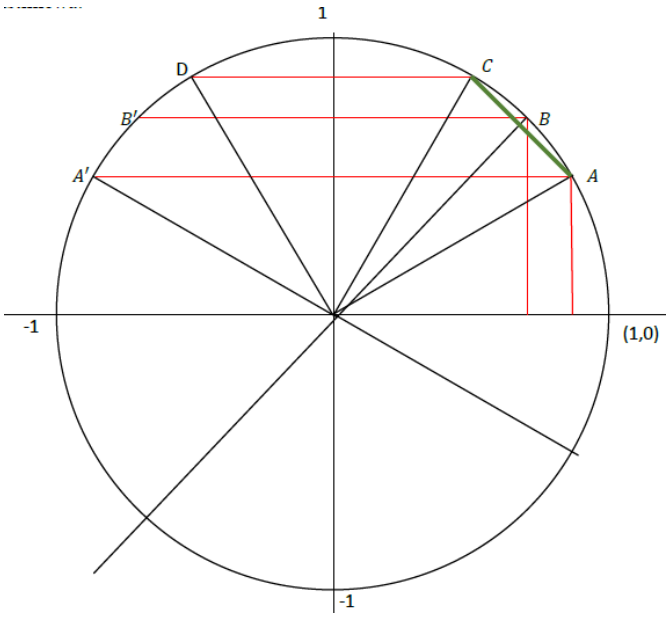
Proses pembelajaran selanjutnya akan digunakan lingkaran satuan untuk menentukan nilai-nilai dari fungsi trigonometri.

Perhatikan Gambar 1.2.



Gambar 1.2 Titik P berpadanan dengan sudut θ

Titik P(x,y) adalah suatu titik pada lingkaran satuan yang berpadanan dengan sudut θ. Dari Gambar 1.2, diperoleh sinθ=y, cosθ=x, dan $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Selanjutnya akan dihitung nilai trigonometri dari beberapa sudut istimewa.



Gambar 1.3 Titik-titik berpadanan dengan sudut-sudut istimewa.

Untuk $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

Dari Gambar 1.3 diperoleh titik yang berkenaan dengan sudut ini adalah titik $A(x_A, y_A)$.

Jelas $y_A = \frac{1}{2}$, jadi

$$x_A^2 + y_A^2 = 1 \quad \Leftrightarrow x_A^2 + \frac{1}{4} = 1$$
$$\Leftrightarrow x_A^2 - \frac{3}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_A - \frac{1}{2}\sqrt{3})(x_A + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_A = \frac{1}{2}\sqrt{3} \ atau \ x_A = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Karena untuk $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$, titik $A(x_A, y_A)$ berada pada lingkaran di daerah kuadran I maka berakibat $x_A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Jadi $A\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Jadi diperoleh $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Untuk $\theta = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

Dari Gambar 1.3 diperoleh titik yang berkenaan dengan sudut ini adalah titik $C(x_C, y_C)$.

Jelas titik C adalah hasil pencerminan titik A oleh garis $y = x$.

Jadi $x_C = y_A \ dan \ y_C = x_A$

Jadi $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

Dengan demikian diperoleh $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ dan \ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Coba ambil sebarang θ dengan $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Kemudian tarik garis lurus dari titik pusat lingkaran ke

lingkaran sebut dengan titik P. Lakukan pencerminan titik tersebut terhadap garis y=x dan sebut bayangannya dengan P'. Akan diperoleh bahwa $x_{P'} = y_P$ dan $y_{P'} = x_P$. Dari proses tersebut diperoleh:

$o \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ berlaku :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

Untuk $\theta = 120^0 = 90^0 + 30^0$

Dari Gambar 1.3 diperoleh titik yang berkenaan dengan sudut ini adalah titik $D(x_P, y_P)$.

Jelas titik D adalah hasil pencerminan titik C oleh Sumbu Y atau garis $x = 0$

Jadi $x_D = -x_C$ dan $y_D = -y_C$ sehingga $D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ dan diperoleh

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ dan\ \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Coba ambil sebarang θ dengan $o \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Kemudian tarik garis lurus dari titik pusat lingkaran ke lingkaran sebut dengan titik Q. Lakukan pencerminan titik tersebut terhadap sumbu Y atau garis x=0 dan sebut bayangannya dengan Q'. Akan diperoleh bahwa $x_{Q'} = -x_Q$ dan $y_{Q'} = -y_Q$

Dari proses tersebut diperoleh

Untuk $o \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ berlaku :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

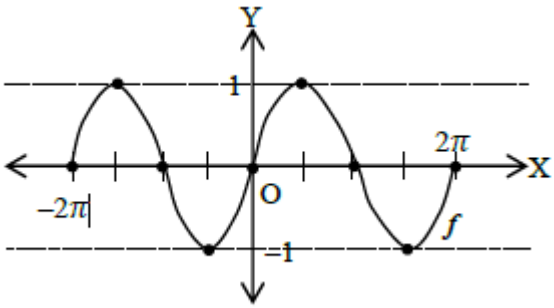
Darilangkah-langkah di atas,diperoleh nilai fungsi trigonometri sudut istimewa seperti tabelberikut ini.

Tabel 5. nilai-nilai fungsi trigonometri untuk beberapa sudut istimewa

θ	$x = \cos\theta$	$y = \sin\theta$	$\frac{y}{x} = \tan\theta$
0	1	0	0
30^0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45^0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
90^0	0	1	TA
120^0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
135^0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150^0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180^0	1	0	0

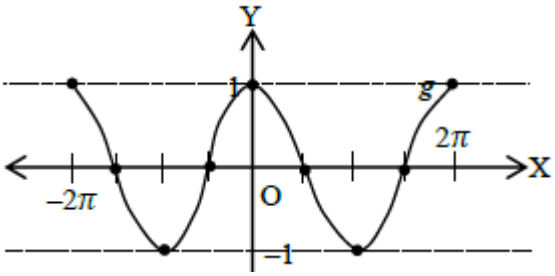
6. Identifikasi grafik fungsi trigonometri

Grafik fungsi sinus diberikan pada Gambar 1.4.



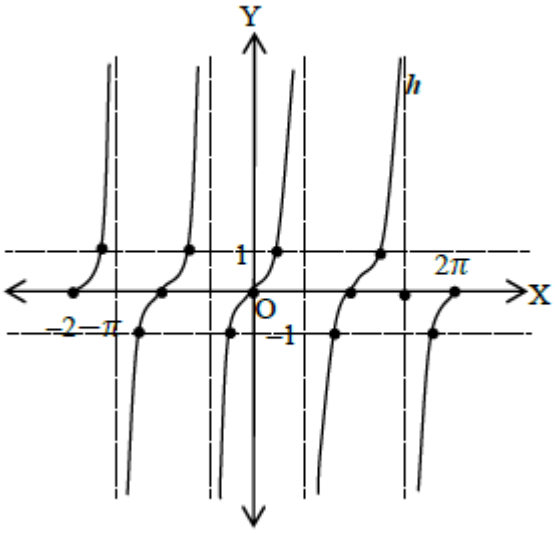
Gambar 1.4 Grafik f:[−2π,2π]→$\mathbb{R}$ dengan $f(x)$=sin$x$

Grafik fungsi cosinus diberikan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5 Grafik g:[−2π,2π]→ℝ dengan $g(x)$=cos$x$

Grafik fungsi tangen diberikan pada Gambar 1.6.



7. Aturan sinus, aturan cosinus

Pada suatu segitiga ABC, dapat ditunjukkan bahwa luas daerah ABC dinotasikan dengan $[ABC]$bernilai $[ABC]=\frac{ab\sin C}{2}$. Dengan menggunakan sudut pandang lainnya diperoleh:

$$[ABC]=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}$$

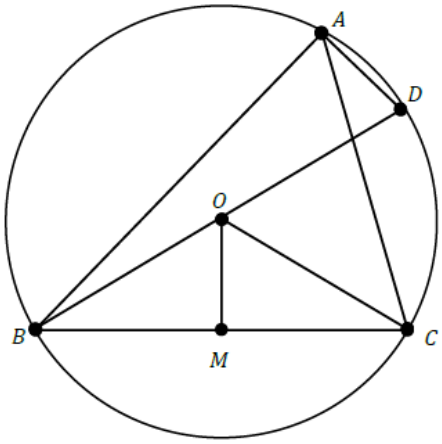
Apabila dikalikan dengan $\frac{2}{abc}$maka diperoleh aturan sinus seperti pada Teorema 1.2.

Teorema 1.2 (Aturan Sinus)

Pada suatu segitiga ABC berlaku

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ atau $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ dengan a panjang sisi di depan sudut A, b panjang sisi di depan sudut B dan c panjang sisi di

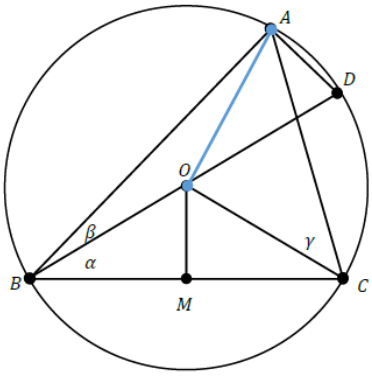
depan sudut C.Gambar 1.7 berikut akan kita gunakan untuk membuktikan perluasan aturan sinus tersebut.



Gambar 1.7 Segitiga dan lingkaran luar segitiga

Dimisalkan lingkaran luar segitiga ABC mempunyai pusat di O dan panjang jari-jari R. Jelas segitiga BOC merupakan segitiga sama kaki. Jadi $\angle OBC$=$\angle OCB$. Tarik garis dari titik A ke titik O.

Perhatikan Gambar 1.8.



Dari Gambar 1.8, terlihat bahwa segitiga AOB dan segitiga AOC juga merupakan segitiga sama kaki. Jadi $\angle OAB = \angle OBA$ dan $\angle OAC = \angle OCA$. Sebut $\angle OBC = \alpha$, $\angle OBA = \beta$, dan $\angle OCA = \gamma$.

Jelas bahwa $\angle BOC = 180^0 - 2\alpha$ dan $\angle BAC = \beta + \gamma$.

Jadi $\angle BAC = 180^0 - [(\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma)]$

$\Leftrightarrow \beta + \gamma = 180^0 - 2\alpha - \beta - \gamma$

$\Leftrightarrow 2(\beta + \gamma) = 180^0 - 2\alpha$

$\Leftrightarrow 2\angle BAC = \angle BOC$

Titik M merupakan titik tengah pada garis BC dan $OM \perp BC$. Karena segitiga OBC merupakan segitiga semi kaki maka $|OB|=|OC|=R$ dan diperoleh juga bahwa $\angle BOM=\angle COM=\angle CAB$ sehingga pada segitiga siku-siku BMO berlaku $|BM|=|OB|\sin A$.

Diperoleh $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{[BC]}{\sin A} = \dfrac{2[BM]}{\sin A} = \dfrac{2[OB]\sin A}{\sin A} = 2\,|\,OB\,| = 2R$

Berdasarkan Teorema 1.2 dapat diperoleh perluasan dari aturan sinus yang diberikan pada Teorema 1.3.

Teorema 1.3 (Perluasan Aturan Sinus)

Pada suatu segitiga ABC berlaku

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

dengan R merupakan jari-jari lingkaran luar segitiga.

Contoh 1.2.

Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Tentukan perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC.

Penyelesaian:

Dipunyai $\angle C$=3$\angle A$ dan $\angle B$=2$\angle A$.

Karena $\angle A$+$\angle B$+$\angle C$=180° maka diperoleh $\angle A$=30°, $\angle B$=60°, dan $\angle C$=90°.

Jelas ABsin∠C=BCsin∠A⇔$ABBC$=sin∠Csin∠A=sin90°sin30°=21.

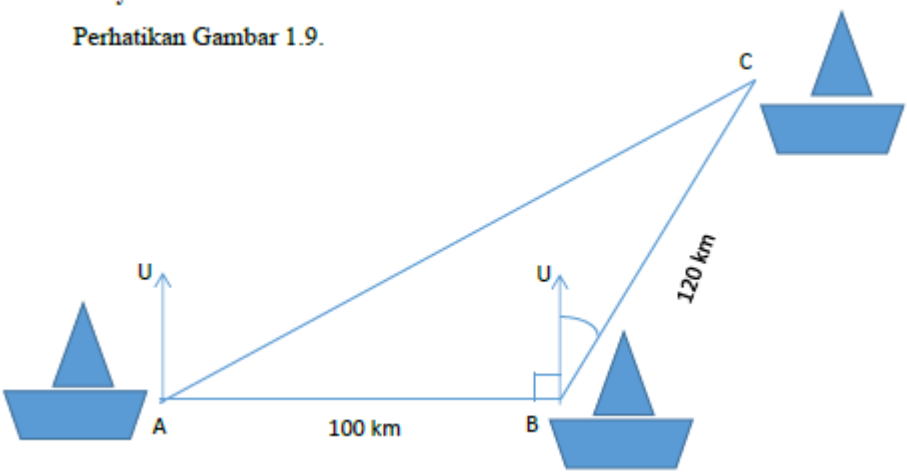
Jadi AB:BC=2:1.

Contoh 1.3.

Sebuah perahu berlayar ke arah timur sejauh 100 km, kemudian memutar pada arah 30° sejauh 120 km hingga berhenti. Jarak perahu dari tempat mula mula berlayar ke tempat pemberhentian adalah ....

Penyelesaian:

Perhatikan Gambar 1.9.



Gambar 1.9 Sketsa pergerakan perahu

Misalkan titik A adalah titik mula-mula dan titik C merupakan titik pemberhentian perahu. Jelas bahwa $\angle ABC$= 90° + 30° = 120°.

Diketahui bahwa panjang AB=100 km dan panjang BC=120 km.

Dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh

$AC2=AB2+ BC2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\angle ABC$$

$$AC^2 = 100^2 + 120^2 - 2.100.120.\cos 120^0$$

$$AC^2 = 10.000 + 14.400 - 2.100.120.(\frac{1}{2}) = 24.400 + 12.000 = 36.400$$

$$Jadi\ AC = 20\sqrt{91}$$

Jadi, jarak kapal dari tempat mula-mula ke tempat pemberhentian adalah 20√91 km.

8. Rumus jumlah dan selisih fungsi trigonometri

Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut.

(1) Cos (A+B) = Cos A. Cos B – Sin A . Sin B
(2) Cos (A-B) = Cos A. Cos B + Sin A . Sin B
(3) Sin (A+B) = Sin A. Cos B + Cos A . Sin B
(4) Sin (A-B) = Sin A. Cos B - Cos A . Sin B
(5) Tan (A+B) = $\frac{TanA+Tan\ B}{1-TanA.TanB}$
(6) Tan (A-B) = $\frac{TanA-TanB}{1+TanA.TanB}$

Contoh Soal :

Diketahui : Sin A = $\frac{3}{5}$ untuk A sudut lancip

Cos B = - $\frac{12}{13}$ untuk B sudut lancip

Tentukan : a. Sin (A + B)

b. Cos (B – A)

c. Tan (A – B)

Jawab :

a. Sin (A+B) = Sin A . Cos B + Cos A . Sin B

$= \frac{3}{5} \cdot (-\frac{12}{13}) + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}$

$= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65}$

$= -\frac{16}{65}$

b. Cos (B-A) = Cos B . Cos A + Sin B . Sin A

$= -\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$

$= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65}$

$= -\frac{33}{65}$

c. Tan (A-B) = $\frac{TanA - TanB}{1 + TanA.TanB}$

$= \frac{3/4 - (-5/12)}{1 + 3/4.(-5/12)}$

$= \frac{3/4 + 5/12}{1 - 15/48} = \frac{36/48 + 20/48}{\frac{48}{48} - \frac{15}{48}}$

$= \frac{56/48}{33/48}$

$= \frac{56}{33}$

Rumus trigonometri rangkap

a. Sin 2 A = 2 Sin A . Cos A

b. Cos 2 A = Cos^2 A – 1

= 2 Cos^2 A – 1

= 1 – 2 Sin^2 A

c. Tan 2 A = $\frac{2.\text{Tan}A}{1-\text{Tan}^2A}$

Contoh :

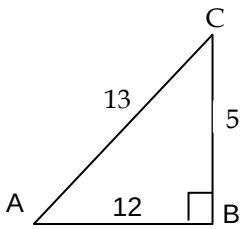
Diketahui Cos A = $\frac{12}{13}$ untuk A sudut lancip.

Tentukan : a. Sin 2 A

b. Cos 2 A

c. Tan 2 A

Jawab :



Cos A = $\frac{12}{13}$

Sin A = $\frac{5}{13}$

Tan A = 5/12

a. Sin 2 A = 2 Sin A . Cos A

= 2 . $\frac{5}{13}$. $\frac{12}{13}$

= $\frac{120}{169}$

b. Cos 2 A = 1 – 2 Sin^2 A

= 1 – 2 $(\frac{5}{13})^2$

= 1 – 2 $\frac{25}{169}$

c. Tan 2 A = <u>2 Tan A</u> = <u>2 . 5/12</u>

$1 - \text{Tan}^2 A \quad 1 - (\frac{5}{12})^2$

$= \frac{\frac{10}{12}}{\frac{144}{144} - \frac{25}{144}} = \frac{10/12}{\frac{119}{144}}$

$= \frac{10}{12} \times \frac{144}{119} = \frac{120}{119}$

$= \frac{169 - 50}{169}$

$= \frac{119}{169}$

Rumus perkalian Sinus dan Cosinus

a. 2 Sin A . Cos B = Sin (A+B) + sin (A-B)
b. 2 Cos A . Sin B = Sin (A+B) – Sin (A-B)
c. 2 Cos A . Cos B = Cos (A+B) + Cos (A-B)
d. – 2 Sin A . Sin B = Cos (A+B) – Cos (A-B)

Contoh :

Nyatakan sebagai jumlah Sinus dan sederhanakan jika mungkin :

a. Cos 75^0 Cos 15^0
b. Cos 2x . Sin x

Jawab :

a. 2 Sin A Cos B = sin (A+B) + sin (A-B)

Sin A Cos B = ½ {Sin (A+B) + Sin (A-B)}

Sin 75 Cos 15 = ½ {Sin (75 + 15) + Sin (75 – 15)}

= ½ {Sin 90^0 + Sin 60^0}

= ½ {1 + ½ $\sqrt{3}$ }

= ½ + ¼ $\sqrt{3}$

b. 2 Cos A . Sin B = Sin (A+B) – Sin (A-B)

Cos A Sin B = ½ {Sin (A+B) – Sin (A-B)}

Cos 2x Sin x = ½ {Sin (2x + x) – Sin (2x – x)}

= ½ {Sin 3x – Sin x}

= ½ Sin 3x – ½ Sin x

Rumus penjumlahan dan pengurangan Sinus dan Cosinus

a. Sin A + Sin B = 2 Sin ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)
b. Sin A – Sin B = 2 Cos ½ (A+B) . Sin ½ (A-B)
c. Cos A – Cos B = 2 Cos ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)
d. Cos A – Cos B = - 2 Sin ½ (A+B) . Sin ½ (A-B)

Contoh :

Hitunglah : a. Cos 75^0 + Cos 15^0 b. Sin 75^0 + Sin 15^0

Jawab :

a. Cos A + Cos B = 2 Cos ½ (A+B) Cos ½ (A-B)

Cos 75^0 + Cos 15^0 = 2 Cos ½ (75+15) Cos ½ (75-15)

= 2 Cos ½ (90) . Cos ½ (60)

= 2 Cos 45 . Cos 30

$= 2 \,.\, ½ \sqrt{2} \,.\, ½ \sqrt{3} = ½ \sqrt{6}$

b. Sin A + Sin B = 2 Sin ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)

Sin 75 + Sin 15 = 2 Sin ½ (75+15) . Cos ½ (75-15)

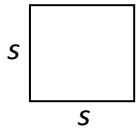
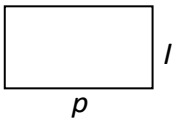
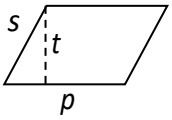
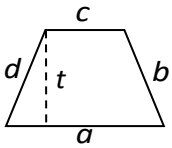
= 2 Sin ½ (90) . Cos ½ (60)

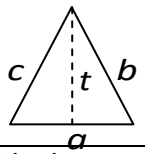
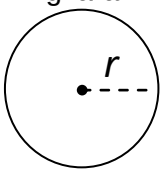
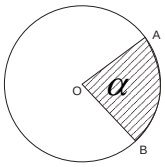
= 2 Sin 45 . Cos 30

$= 2 \,.\, ½ \sqrt{2} \,.\, ½ \sqrt{3} = ½ \sqrt{6}$

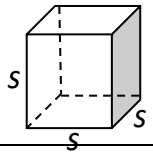
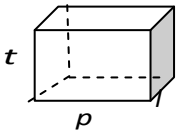
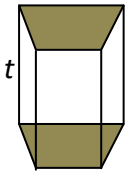
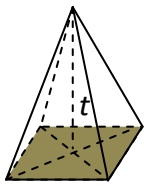
D. Rangkuman

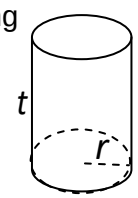
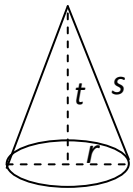
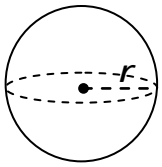
1. Bangun Datar

No	Bidang Datar	Keliling	Luas
1	Persegi 	K = 4s	$L = s^2$
2	Persegi Panjang 	K = 2(p + l)	L = p.l
3	Jajar Genjang 	K = 2(p + s)	L = p.t
4	Trapesium 	K = a + b + c + d	$L = \frac{(a+c).t}{2}$

5	Segitiga 	K = a + b + c	$L = \frac{1}{2} a.t$
6	Lingkaran 	K= 2πr	L = πr^2
7		Panjang busur Lingkaran $= \frac{\alpha}{360^0}$ x K $_{lingkaran}$	L juring Lingkaran $= \frac{\alpha}{360^0}$ x L $_{lingkaran}$

2. Bangun Ruang

No	Bangun Ruang	Luas Permukaan	Volume
1	Kubus 	L = $6s^2$	V = s^3
2	Balok 	L = 2(p.l + p.t + l.t)	V = p.l.t
3	Prisma 	L = 2. L alas + L selimut prisma	V = L alas x t
4	Limas 	L = L alas + L selimut limas	V = $\frac{1}{3}$ L alas x t

5	Tabung 	L = 2.L alas + Luas selimut L = $2\pi r^2 + 2\pi rt$ $= 2\pi r\ (r + t)$	$V = \pi r^2.t$
6	Kerucut 	L = L alas + L selimut $L = \pi r^2 + \pi rs$ $L = \pi r\ (r + s)$ dengan: $s = \sqrt{r^2 + t^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 xt$
7	Bola 	$L = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. Transformasi Geometri

No	Transformasi	Pemetaan	Matriks Transformasi
1	Identitas	(x , y) → (x , y)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2	Translasi (translasi T $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$)	(x , y) → (x ’, y ’)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu x	(x , y) → (x , -y)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap sumbu y	(x , y) → (-x , y)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap garis y = x	(x , y) → (y , x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
6	Pencerminan terhadap garis y = -x	(x , y) → (-y , -x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
7	Rotasi 90° terhadap O [R , 90°]	(x , y) → (-y , x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
8	Rotasi - 90° terhadap O [R , - 90°]	(x , y) → (y , -x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
9	Dilatasi pusat O dan faktor skala k	(x , y) → (kx , ky)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

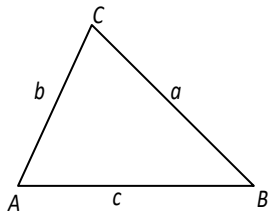
4. Trigonometri
   a. Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih 2 Sudut
      1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$
      2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$
      3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$
      4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$
      5) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$
      6) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta}$
   b. Rumus Trigonometri untuk sudut rangkap dan setengah sudut

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha . \cos\alpha$	1) $\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $= 2\cos^2\alpha - 1$ $= 1 - 2\sin^2\alpha$	2) $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	3) $\tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ $= \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $= \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

   c. Rumus Trigonometri untuk Perkalian sinus-kosinus
      1) $2 \sin\alpha . \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
      2) $2 \cos\alpha . \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
      3) $2 \cos\alpha . \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
      4) $-2 \sin\alpha . \sin\beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

   d. Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Sinus-Kosinus
      1) $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B).\cos\frac{1}{2}(A - B)$
      2) $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B).\sin\frac{1}{2}(A - B)$
      3) $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B).\cos\frac{1}{2}(A - B)$
      4) $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B).\sin\frac{1}{2}(A - B)$

e. Aturan Sinus dan Cosinus



Aturan sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan Kosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Jika Δ ABC di atas diketahui salah satu sudutnya dan diapit oleh 2 buah sisi segitiga yang diketahui panjangnya, maka rumus luas Δ ABC tersebut yaitu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}bc.\sin A \\ &= \frac{1}{2}ac.\sin B \\ &= \frac{1}{2}ab.\sin C \end{aligned}$$

Jika Δ ABC di atas diketahui ketiga panjang sisinya, maka luas Δ ABC tersebut ditentukan dengan rumus:

$L = \sqrt{s.(s-a)(s-b)(s-c)}$, dengan $s = \frac{1}{2}K\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)$