Pembelajaran 3. Logika Matematika

A. Kompetensi

1. Mendeskripsikan kalimat, pernyataan, dan tabel kebenaran
2. Menyelesaikan masalah menggunakan nilai kebenaran logika matematika
3. Mendeskripsikan aljabar proposisi dan argumen
4. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti bersyarat dan bukti tak langsung

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengidentifikasi pernyataan kalimat terbuka
2. Menentukan negasi pernyataan tunggal
3. Mengidentifikasi pernyataan majemuk
4. Menentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk
5. Menarik kesimpulan dari pernyataan berkuantor, tautologi dan kontradiksi
6. Mengidentifikasi hukum-hukum aljabar proposisi
7. Menguji keabsahan argumen berdasarkan logika matematika
8. Membangun argumen dengan metode inferensi
9. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti bersyarat
10. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti tak langsung

C. Uraian Materi

1. Kalimat, Pernyataan, dan Tabel Kebenaran

Kalimat dibedakan menjadi 2 macam, yaitu : (1) kalimat deklaratif/pernyataan, dan (2) kalimat non deklaratif

Kalimat Deklaratif (pernyataan)

Kalimat deklaratif atau pernyataan adalah kalimat berarti yuang mempunyai nilai logika BENAR atau SALAH, tetapi tidak kedua-duanya dalam saat bersamaan. Kalimat pernyataan dikatakan bernilai logik BENAR apabila pernyataan itu berlaku secara umum dan atau sesuai dengan keadaan sebenarnya (faktual).

Benar atau salahnya suatu pernyataan dapat ditunjukkan dengan bukti. Apabila untuk menentukan benar atau salahnya suatu pernyataan harus mengadakan observasi (penyelidikan) maka pernyataan yang demikian disebut faktual.

Contoh :

Jakarta adalah Ibukota Negara dan kota metropolitan. (benar secara faktual)

Daffa ingin naik kelas. (benar secara umum)

Nugraha sedang sakit panas. (benar secara faktual)

Kalimat non-Dekalratif (bukan pernyataan)

Kalimat non-deklaratif adalah kalimat berarti yang tidak atau belum mempunyai nilai logik. Biasanya berupa kalimat tanya, kalimat perintah atau kalimat terbuka.

Contoh :

Kemana saja kamu selama ini ? (tidak mempunyai nilai logik, karena kalimat tanya)

Hapuslah air matamu ! (tidak mempunyai nilai logik, karena kalimat perintah)

$x^2 - 25 = 0$ (tidak mempunyai nilai logik, karena kalimat terbuka)

Kalimat Terbuka dan Tertutup

Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel. Jika variabelnya diganti oleh suatu konstanta, kalimat tersebut akan berubah menjadi suatu pernyataan. Konstanta yang menggantikan variabel suatu kalimat terbuka menjadi pernyataan yang benar disebut penyelesaian dari kalimat terbuka itu.

Contoh :

$8x - 70 = -6$. Jika x diganti dengan 2 maka menjadi pernyataan yang salah, tetapi jika x diganti dengan 8 maka menjadi pernyataan yang benar.

Pada kalimat di atas 8 disebut **penyelesaian**. Sebuah kalimat matematika yang tidak memuat variabel dan dapat dinyatakan benar/salah tetapi tidak kedua-duanya disebut **kalimat tertutup**.

Contoh :

$7 + 5 = 12$ (benar)

$14 - 12 = 20$ (salah)

Kalimat Majemuk

1. Konjungsi

Jika dua pernyataan digabungkan dengan kata “dan” maka pernyataan itu disebut konjungsi. Penulisan kata gabung “dan “ pada konjungsi dilambangkan dengan tanda : “ $\wedge$ “. Sedangkan tabel kebenaran pernyataan-pernyataan konjungsi disampaikan dalam bentuk tabel sebagai berikut :

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

atau

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Pernyataan majemuk $P \wedge Q$ dikatakan benar jika kedua-duanya benar dalam hal lain dikatakan salah.

Contoh :

a. P : Singa adalah binatang buas. (B)
Q : Singa binatang pamakan daging. (B)
$P \wedge Q$: Singa adalah binatang buas dan pemakan daging. (B)

b. P : 9 adalah bilangan ganjil. (B)
Q : 9 adalah bilangan prima. (S)
$P \wedge Q$: 9 adalah bilangan ganjil dan prima. (S)

c. P : 7 adalah bilangan genap. (S)
Q : 7 adalah bilangan khayal. (S)
$P \wedge Q$: 7 adalah bilangan genap dan khayal. (S)

2. Disjungsi

Jika dua pernyataan digabungkan dengan kata “ atau “ maka pernyataan majemuk ini disebut disjungsi. Disjungsi mempunyai dua arti yang berbeda yaitu: (1) Disjungsi Inklusif dan (2) Disjungsi Eksklusif

Disjungsi inklusif mempunyai makna benar jika paling sedikit satu dari pernyataan bernilai benar.

Lambang disjungsi inklusif adalah “ $\vee$ “ dan tabel kebenarannya sebagai berikut.

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

atau

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pernyatan majemuk $P \vee Q$ dikatakan salah jika kedua-duanya salah, dalam hal lain dikatakan benar.

Contoh :

a. P : Tono membeli baju

Q : Tono membeli celana

$P \vee Q$: Tono membei baju atau celana

Keterangan :

Pernyataan di atas mempunyai makna sebagai berikut :

1. Tono membeli baju tetapi Tono tidak membeli celana
2. Tono membeli celana tetapi Tono tidak membeli baju
3. Tono membeli baju sekaligus juga membeli celana

Dijungsi eksklusif mempunyai makna benar jika paling sedikit satu pernyataan benar tetapi tidak kedua-duanya.

Disjungsi eksklusif mempunyai lambang " $\underline{\vee}$ " dan tabel kebenaran dari disjungsi eksklusif sebagai berikut.

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

atau

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pernyataan majemuk $P \underline{\vee} Q$ dikatakan bernilai salah jika P dan Q bernilai sama, dalam hal lain dikatakan benar.

Contoh :

a. P : Ibu sedang pergi ke pasar.

Q : Ibu sedang memasak.

$P \vee Q$: Ibu sedang pergi ke pasar sedang memasak.

Keterangan :

Pernyataan di atas mempunyai makna :

1. Ibu sedang pergi ke pasar tetapi tidak sedang memasak.
2. Ibu tidak sedang pergi ke pasar tetapi sedang memasak.
3. Tidak mungkin ibu sedang pergi ke pasar sekaligus sedang memasak begitu pula sebaliknya.

3. Implikasi (kondisional)

Pernyataan majemuk yang berbentuk " jika P maka Q " disebut implikasi atau kondisional. Lambang penulisan implikasi sebagai berikut :

" $P \rightarrow Q$ " atau " $P \Rightarrow Q$"

Pernyataan majemuk " $P \rightarrow Q$ " akan dikatakan bernilai salah jika P benar dan Q salah, dalam hal lain dikatakan benar.

Tabel kebenaran dari implikasi sebagai berikut :

P	Q	$P \rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

atau

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Contoh :

a. P : Achmad siswa yang rajin. (B)
   Q : Achmad naik kelas. (B)
   $P \rightarrow Q$: Jika Achmad siswa yang rajin maka Achmad naik kelas. (B)

b. P : 7 x 2 = 72 (S)
   Q : 6 + 4 = 10 (B)
   $P \rightarrow Q$: Jika 7 x 2 = 72 maka 6 + 4 = 10 (B).

c. P : - 6 adalah bilangan bulat. (B)
   Q : - 6 adalah bilangan irrasional (S)
   $P \rightarrow Q$: Jika - 6 adalah bilangan bulat maka – 6 adalah Bilangan irrasional. (S)

4. Bi-Implikasi

Pernyataan majemuk yang berbentuk " P jika dan hanya jika Q " disebut Bi-implikasi. Penulisan Bi-implikasi menggunakan lambang " $P \leftrightarrow Q$ atau $P \Leftrightarrow Q$ ". Lambang di atas bermakna :

1. P jika dan hanya jika Q.
2. P ekuivalen Q.
3. P syarat yang perlu dan cukup untuk Q.

Jika P dan Q dua pernyataan yang tersusun sebagai "$P \leftrightarrow Q$ " maka tabel kebenarannya sebagai berikut :

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

atau

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pernyataan $P \leftrightarrow Q$ akan dikatakan bernilai benar jika P dan Q jika P dan Q bernilai sama, dalam hal lain dikatakan salah .

Contoh :

a. P : Gajah binatang berkaki empat. (B)
Q : Gajah bertelinga lebar. (B)
$P \leftrightarrow Q$: Gajah binatang berkaki empat jika dan hanya jika gajah binatang bertelinga lebar

b. P : $8 + 2 = 10$ (B)
Q : $- 16 – 4 = - 12$ (S)
$P \leftrightarrow Q$: $8 + 2 = 10$ jika dan hanya jika $– 16 – 4 = - 12$ (S)

c. P : $7 < - 20$ (S)
Q : 20 adalah bilangan ganjil. (S)
$P \leftrightarrow Q$: $7 < - 20$ jika dan hanya jika 20 adalah bilangan ganjil. (S)

5. Negasi

Negasi atau ingkaran adalah penolakan dari pernyataan yang ada. Jika sebuah pernyataan bernilai salah maka negasinya bernilai benar dan jika pernyataan bernilai benar maka negasinya bernilai salah. Penulisan lambang negasi P adalah " ~ P ". Untuk menentukan ingkaran atau negasi dari sebuah pernyataan maka penulisan ditambah kata " tidak , tidak benar bahwa, atau bukan" di depan pernyataan.

Tabel kebenaran dari negasi adalah sebagai berikut :

P	~ P
B	S
S	B

P	~ P
1	0
0	1

Contoh :

a. P : 2 adalah bilangan prima. (B)
~ P : 2 adalah bukan bilangan prima. (S)

b. P : Ali anak orang kaya. (B)
~ P : Ali bukan anak orang kaya. (S)

Negasi dari pernyataan ekuivalen dengan disjungsi dari masing-masing konjungsinya dan begitu sebaliknya. Bentuk kesetaraan di atas disebut juga dengan dalil De-Morgan, yaitu :

$$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

Selain dalil De-Morgan masih banyak kesetaraan yang lain, misalnya :

$$\sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$$

$$\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$$

Contoh :

a. 8 adalah bilangan genap <u>dan</u> bulat.
Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu :
1. <u>Tidak benar bahwa</u> 8 adalah bilangan genap <u>dan</u> bulat.
2. 8 adalah <u>bukan</u> bilangan genap <u>atau</u> <u>bukan</u> bilangan bulat.

b. Kita dapat berbelanja di Toko Laris <u>atau</u> di Matahari Dept. Store.
Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu :
1. <u>Tidak benar bahwa</u> kita dapat berbelanja di Toko Laris <u>atau</u> di Matahari Dept. Store.
2. Kita dapat berbelanja <u>tidak</u> di Toko Laris <u>dan</u> <u>tidak</u> di Matahari Dept. Store.

2. Tautologi dan Kontradiksi

Kuator

a. Kuantor Universal
Kata-kata yang biasa digunakan dalam kuantor universal adalah “semua”, “setiap”, “untuk semua” atau “untuk setiap”.

Kuantor universal dilambangkan dengan ∀. Berikut adalah contoh kuantor universal.

(1) Semua kuadrat bilangan real merupakan bilangan real positif atau nol $\forall x \in R, x^2 \geq 0$

(2) Untuk setiap segitiga siku-siku ABC dengan sisi a, b, dan sisi miring c, berlaku a^2 + b^2 = c^2.

b. Kuantor Eksistensial

Pernyataan matematika yang dilengkapi dengan kata-kata "terdapat", "ada", "sekurang-kurangnya satu", atau "beberapa" merupakan pernyataan berkuantor eksistensial. Kuantor eksistensial dilambangkan dengan ∃. Berikut adalah contoh kuantor eksistensial.

1) Terdapat beberapa pasangan bilangan bulat m dan n sehingga $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$ $\exists m, n \in Z \ni \frac{4}{m}+\frac{2}{n}$

2) Ada mahasiswa UNNES yang memiliki usaha sendiri.

c. Negasi Pernyataan Kuantor

Dua buah pernyataan (proposisi) dikatakan **ekivalen (berekivalensi logis)** jika kedua pernyataan itu memiliki nilai kebenaran yang sama. Perhatikan dua pernyataan berikut.

p: Guru pahlawan bangsa

q: Tidak benar bahwa guru bukan pahlawan bangsa

Kedua pernyataan ini akan memiliki nilai kebenaran yang sama, tidak peduli bagaimana nlai kebenaran dari pernyataan semula. Dengan demikian, $\boldsymbol{p}$ **ekivalen dengan** $\boldsymbol{q}$ dan dapat ditulis $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$.

Berdasarkan definisi di atas, sifat-sifat pernyataan-pernyataan yang ekivalen (berekivalensi logis) adalah:

a. $p \equiv q$
b. Jika $p \equiv q$ maka $q \equiv p$
c. Jika $p \equiv q$ dan $q \equiv r$ maka $p \equiv r$

Sifat pertama berarti bahwa setiap pernyataan selalu ekivalen (memiliki nilai kebenaran yang sama) dengan pernyataan itu sendiri. Sifat kedua berarti bahwa jika suatu pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan lain, maka berlaku sebaliknya. Sedangkan sifat ketiga berarti bahwa jika pernyataan pertama mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan kedua dan pernyataan kedua mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan ketiga maka nilai kebenaran pernyataan pertama dan ketiga akan sama.

Teorema DeMorgan

Misalkan $p(x)$ adalah sebuah fungsi proposisional pada A, maka

(i) $\sim(\forall x \in A)p(x) \equiv (\exists x \in A)\sim p(x)$
(ii) $\sim(\exists x \in A)p(x) \equiv (\forall x \in A)\sim p(x)$

Untuk memperjelas contoh di atas, disajikan contoh sebagai berikut.

(i) “Tidak benar bahwa semua bilangan prima adalah bilangan ganjil.” Menurut Teorema DeMorgan pernyataan di atas dapat dibuat pernyataan lain yang ekuivalen, yaitu “Terdapat bilangan prima yang bukan bilangan ganjil.”

(ii) “Tidak benar bahwa ada segitiga yang jumlah sudutnya lebih dari sama dengan $180°$.”

Menurut Teorema DeMorgan pernyataan di atas dapat dibuat pernyataan lain yang ekuivalen, yaitu “Semua segitiga, jumlah sudutnya kurang dari $180°$.”

3. Tautologi dan Kontradiksi

Pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar untuk setiap substitusi pernyataan tunggalnya dinamakan tautologi. Dengan kata lain, tautologi merupakan pernyataan yang selalu bernilai benar dalam kondisi apapun. Tautologi digunakan sebagai dasar dalam pengambilan keputusan atau pembuktian matematis.

Perhatikan contoh-contoh tautologi berikut ini.

Contoh 1.

“Ani mempunyai sepeda atau Ani tidak mempunyai sepeda. Pernyataan majemuk ini bernilai *B* (benar), untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya.

Misalnya,

a = “Ani mempunyai sepeda”, bernilai *B*.

$\sim a$ = “Ani tidak mempunyai sepeda”, bernilai *S*. Maka, $a \vee \sim a$ bernilai *B*.

Begitu pula apabila “a” bernilai S maka “$\sim a$” bernilai *B* sehingga $a \vee \sim a$ bernilai *B*

Pernyataan majemuk yang selalu bernilai *B* untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya seperti itu disebut tautologi.

Kontradiksi

Jika tautologi adalah pernyataan yang selalu bernilai benar, maka sebaliknya kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah untuk setiap substitusi nilai kebenaran pernyataan tunggalnya.

Contoh 1.

Tentukan nilai kebenaran pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim p$ dengan tabel kebenaran.

Penyelesaian:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
B	B	B	S	S
B	S	S	S	S
S	B	S	B	S
S	S	S	B	S

Dari tabel kebenaran di atas terlihat bahwa $(p \wedge q) \wedge \sim p$ selalu bernilai *S*, sehingga pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim p$ disebut kontradiksi.

D. Rangkuman

1. Pernyataan
   - Pernyataan adalah suatu kalimat yang sudah jelas nilai kebenarannya (benar saja atau salah saja).
   - kalimat terbuka adalah kalimat yang belum jelas nilai kebenarannya.
   - pernyataan disebut juga kalimat tertutup/ proposisi.
   - simbol: p, q, r, ….
2. Operasi pada Pernyataan

P	q	~p	~q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	S	S
S	B	B	S	S	B	B	S
S	S	B	B	S	S	B	B

3. Tautologi, Kontradiksi, dan kontingensi
   - *Tautologi* adalah pernyataan majemuk yang kompenen pembentuk kebenarannya bernilai **benar semua**.
   - *Kontradiksi* adalah pernyataan majemuk yang kompenen pembentuk kebenarannya bernilai **salah semua**.
   - *kontingensi* adalah pernyataan majemuk yang kompenen pembentuk kebenarannya terdapat nilai **benar dan salah**.

4. Ekuivalensi Pernyataan majemuk
   - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   - $p \vee q \equiv q \vee p$
   - $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
   - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
   - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   - $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
   - $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
5. Negasi pernyataan majemuk (*De Morgan*):
   - $\sim (\sim p) \equiv p$
   - $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   - $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
   - $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
   - $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim P)$
6. Kalimat Kuantor
   - Kuantor Universal

     $\forall x, p(x)$ dibaca: untuk setiap/ semua x berlaku p(x)
   - Kuantor Eksistensial

     $\exists x, p(x)$ dibaca: ada/ beberapa x berlaku p(x)

     Negasi kalimat kuantor:
   - $\sim \forall x, p(x) \equiv \exists x, \sim p(x)$
   - $\sim \exists x, p(x) \equiv \forall x, \sim p(x)$
7. Konvers, Invers, dan Kontraposisi dari Implikasi

   Dari Implikasi $p \Rightarrow q$ dapat dibuat implikasi lain, yaitu:
   - $q \Rightarrow p$: Konvers
   - $\sim p \Rightarrow \sim q$: Invers
   - $\sim q \Rightarrow \sim p$: Kontraposisi

   dengan ekuivalensi:
   - $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
   - $q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$
8. Penarikan Kesimpulan

   Terdapat tiga prinsip penarikan kesimpulan:

1) Modus ponens	2) Modus tollens	3) Silogisme
P1 : $p \Rightarrow q$	P1 : $p \Rightarrow q$	P1 : $p \Rightarrow q$
P2 : p	P2 : $\sim q$	P2 : $q \Rightarrow r$
K : $\therefore q$	K : $\therefore \sim p$	K : $\therefore p \Rightarrow r$