Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Modul Belajar Mandiri

CALON GURU

Aparatur Sipil Negara (ASN)
Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja (PPPK)

Bidang Studi
Matematika

MODUL BELAJAR MANDIRI
CALON GURU

Aparatur Sipil Negara (ASN)
Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja (PPPK)

Bidang Studi
Matematika

Penulis :
Tim GTK DIKDAS

Desain Grafis dan Ilustrasi:
Tim Desain Grafis

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar peserta didik. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter Pancasila yang prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen utama dalam pendidikan sehingga menjadi fokus perhatian Pemerintah maupun Pemerintah Daerah dalam seleksi Guru Aparatur Sipil Negara (ASN) Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kontrak (PPPK).

Seleksi Guru ASN PPPK dibuka berdasarkan pada Data Pokok Pendidikan. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan mengestimasi bahwa kebutuhan guru di sekolah negeri mencapai satu juta guru (di luar guru PNS yang saat ini mengajar). Pembukaan seleksi untuk menjadi guru ASN PPPK adalah upaya menyediakan kesempatan yang adil bagi guru-guru honorer yang kompeten agar mendapatkan penghasilan yang layak. Pemerintah membuka kesempatan bagi: 1). Guru honorer di sekolah negeri dan swasta (termasuk guru eks-Tenaga Honorer Kategori dua yang belum pernah lulus seleksi menjadi PNS atau PPPK sebelumnya. 2). Guru yang terdaftar di Data Pokok Pendidikan; dan Lulusan Pendidikan Profesi Guru yang saat ini tidak mengajar.

Seleksi guru ASN PPPK kali ini berbeda dari tahun-tahun sebelumnya, dimana pada tahun sebelumnya formasi untuk guru ASN PPPK terbatas. Sedangkan pada tahun 2021 semua guru honorer dan lulusan PPG bisa mendaftar untuk mengikuti seleksi. Semua yang lulus seleksi akan menjadi guru ASN PPPK hingga batas satu juta guru. Oleh karenanya agar pemerintah bisa mencapai target satu juta guru, maka pemerintah pusat mengundang pemerintah daerah untuk mengajukan formasi lebih banyak sesuai kebutuhan.

Untuk mempersiapkan calon guru ASN PPPK siap dalam melaksanakan seleksi guru ASN PPPK, maka Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan (Ditjen GTK) mempersiapkan modul-modul pembelajaran setiap bidang studi yang digunakan sebagai bahan belajar mandiri, pemanfaatan komunitas pembelajaran menjadi hal yang sangat penting dalam belajar antara calon guru ASN PPPK secara mandiri. Modul akan disajikan dalam konsep pembelajaran mandiri menyajikan pembelajaran yang berfungsi sebagai bahan belajar untuk mengingatkan kembali substansi materi pada setiap bidang studi, modul yang dikembangkan bukanlah modul utama yang menjadi dasar atau satu-satunya sumber belajar dalam pelaksanaan seleksi calon guru ASN PPPK tetapi dapat dikombinasikan dengan sumber belajar lainnya. Peran Kemendikbud melalui Ditjen GTK dalam rangka meningkatkan kualitas lulusan guru ASN PPPK melalui pembelajaran yang bermuara pada peningkatan kualitas peserta didik adalah menyiapkan modul belajar mandiri.

Direktorat Guru dan Tenaga Kependidikan Pendidikan Dasar (Direktorat GTK Dikdas) bekerja sama dengan Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) yang merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan modul belajar mandiri bagi calon guru ASN PPPK. Adapun modul belajar mandiri yang dikembangkan tersebut adalah modul yang di tulis oleh penulis dengan menggabungkan hasil kurasi dari modul Pendidikan Profesi Guru (PPG), Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB), Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP), dan bahan lainnya yang relevan. Dengan modul ini diharapkan calon guru ASN PPPK memiliki salah satu sumber dari banyaknya sumber yang tersedia dalam mempersiapkan seleksi Guru ASN PPPK.

Mari kita tingkatkan terus kemampuan dan profesionalisme dalam mewujudkan pelajar Pancasila.

Jakarta, Februari 2021
Direktur Jenderal Guru dan Tenaga
Kependidikan,

Iwan Syahril

Kata Pengantar

Puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT atas selesainya Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru Aparatur Sipil Negara (ASN) Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kontrak (PPPK) untuk 25 Bidang Studi (berjumlah 39 Modul). Modul ini merupakan salah satu bahan belajar mandiri yang dapat digunakan oleh calon guru ASN PPPK dan bukan bahan belajar yang utama.

Seleksi Guru ASN PPPK adalah upaya menyediakan kesempatan yang adil untuk guru-guru honorer yang kompeten dan profesional yang memiliki peran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar peserta didik. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter Pancasila yang prima.

Sebagai salah satu upaya untuk mendukung keberhasilan seleksi guru ASN PPPK, Direktorat Guru dan Tenaga Kependidikan Pendidikan Dasar pada tahun 2021 mengembangkan dan mengkurasi modul Pendidikan Profesi Guru (PPG), Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB), Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP), dan bahan lainnya yang relevan sebagai salah satu bahan belajar mandiri.

Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru ASN PPPK ini diharapkan dapat menjadi salah satu bahan bacaan (bukan bacaan utama) untuk dapat meningkatkan pemahaman tentang kompetensi pedagogik dan profesional sesuai dengan bidang studinya masing-masing.

Terima kasih dan penghargaan yang tinggi disampaikan kepada pimpinan Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) yang telah mengijinkan stafnya dalam menyelesaikan Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru ASN PPPK. Tidak lupa saya juga sampaikan terima kasih kepada para widyaiswara dan Pengembang Teknologi Pembelajaran (PTP) di dalam penyusunan modul ini.

Semoga Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru ASN PPPK dapat memberikan dan mengingatkan pemahaman dan keterampilan sesuai dengan bidang studinya masing-masing.

Jakarta, Februari 2021

Direktur Guru dan Tenaga
Kependidikan Pendidikan Dasar,

Dr. Drs. Rachmadi Widdiharto, M. A
NIP. 196805211995121002

Daftar Isi

Hlm.

Daftar Tabel

Hlm.

Daftar Gambar

Pendahuluan

A. Deskripsi Singkat

Dalam rangka memudahkan guru mempelajarinya bahan belajar mandiri calon guru P3K, di dalam bahan belajar ini dimuat pada model kompetensi terkait yang memuat target kompetensi guru dan indikator pencapaian kompetensi.

Bahan belajar mandiri bidang studi matematika berisi pembelajaran-pembelajaran bagi calon guru P3K yang yang terdiri dari,

- Pembelajaran 1. Bilangan
- Pembelajaran 2. Aljabar dan Program Linear
- Pembelajaran 3. Logika Matematika
- Pembelajaran 4. Geometri dan Trigonometri
- Pembelajaran 5. Kalkulus
- Pembelajaran 6. Kombinatorika dan Statistika

Bahan belajar mandiri ini memberikan pengamalan belajar bagi calon guru P3K dalam memahami teori dan konsep dari pembelajaran dari setiap materi dan substansi materi yang disajikan.

Komponen-komponen di dalam modul belajar mandiri ini dikembangkan berdasarkan modul-modul yang telah dikembangkan Dirjen GTK, diantaranya Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB), Modul Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP), dan Modul Pendidikan Profesi Guru (PPG) dengan tujuan agar calon guru P3K dapat dengan mudah memahami teori dan konsep bidang studi kimia, sekaligus mendorong guru untuk mencapai kemampuan berpikir tingkat tinggi.

Rangkuman pembelajaran diberikan disetiap akhir pembelajaran yang berfungsi untuk memudahkan dalam membaca substansi materi esensial, mudah dalam mengingat pembelajaran dan matari-materi esensial, mudah dalam memahami pembelajaran dan matari-materi esensial, dan cepat dalam mengingat kembali pembelajaran dan matari-materi esensial

B. Peta Kompetensi

Bahan belajar mandiri ini dikembangkan berdasarkan model kompetensi guru. Kompetensi tersebut dapat dijabarkan menjadi beberapa indikator. Target kompetensi menjadi patokan penguasaan kompetensi oleh guru P3K.

Kategori Penguasaan Pengetahuan Profesional yang terdapat pada dokumen model kompetensi yang akan dicapai oleh guru P3K ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Target Kompetensi Guru P3K

KOMPETENSI	INDIKATOR
Menganalisis struktur & alur pengetahuan untuk pembelajaran	1.1.1 Menganalisis struktur & alur pengetahuan untuk pembelajaran
	1.1.2 Menganalisis prasyarat untuk menguasai konsep dari suatu disiplin ilmu
	1.1.3.Menjelaskan keterkaitan suatu konsep dengan konsep yang lain

Untuk menterjemahkan model kompetensi guru, maka dijabarkanlah target komptensi guru bidang studi yang terangkum dalam pembelajaran-pembelajaran dan disajikan dalam bahan belajar mandiri bidang studi matematika. Komptensi guru bidang studi matematika dapat dilihat pada tabel 2 dibawah ini.

Tabel 2. Peta Kompetensi Bahan Belajar Bidang Studi Matematika

KOMPTENSI GURU	INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPTENSI
Pembelajaran 1. Bilangan	
1. Menerapkan konsep keterbagian, FPB, dan KPK untuk memecahkan masalah 2. Menggunakan kongruensi modulo untuk pemecahan masalah 3. Menggunakan konsep notasi sigma, barisan dan deret untuk memecahkan masalah	1. menyelesaikan masalah menggunakan faktorisasi bilangan 2. menyelesaikan masalah menggunakan konsep bilangan prima. 3. menyelesaikan masalah menggunakan konsep kelipatan bilangan.

4. Menggunakan induksi matematika untuk pemecahan masalah	4. Menyelesaikan masalah dengan konsep kongruensi modulo 5. Menyelesaikan masalah dengan konsep sistem residu 6. Menyelesaikan masalah dengan menggukanan konsep notasi sigma 7. Menyelesaikan masalah dengan menggukanan konsep barisan aritmatika 8. Menyelesaikan masalah dengan menggukanan konsep barisan geometri 9. Menyelesaikan masalah dengan menggukanan konsep deret aritmatika 10. Menyelesaikan masalah dengan menggukanan konsep deret geometri 11. Menyelesaikan masalah dengan induksi matematika
Pembelajaran 2. Aljabar dan Program Linear	
1. Menggunakan bentuk aljabar dan sistem persamaan untuk meyelesaikan masalah 2. Menggunakan matriks dan vektor untuk memecahkan masalah 3. Menerapkan program linear untuk memecahkan masalah	1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bentuk-bentuk aljabar 2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan danpertidaksamaan linear 3. Menyelesaikan masalah dengan sistem persamaan linear 4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian atau invers matrik

	5. Menyelesaikan masalah menggunakan vektor 6. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi 7. Membuat model matematika dari suatu masalah kontekstual 8. Menyelesaikan masalah program linear denganmetode grafik 9. Menyelesaikan masalah program linear dengan metode simpleks 10. Menyelesaikan masalah dualitas
Pembelajaran 3. Logika Matematika	
1. Mendeskripsikan kalimat, pernyataan, dan tabel kebenaran 2. Menyelesaikan masalah menggunakan nilai kebenaran logika matematika 3. Mendeskripsikan aljabar proposisi dan argumen 4. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti bersyarat dan bukti tak langsung	1. Mengidentifikasi pernyataan kalimat terbuka 2. Menentukan negasi pernyataan tunggal 3. Mengidentifikasi pernyataan majemuk 4. Menentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk 5. Menarik kesimpulan dari pernyataan berkuantor, tautologi dan kontradiksi 6. Mengidentifikasi hukum-hukum aljabar proposisi 7. Menguji keabsahan argumen berdasarkan logika matematika 8. Membangun argumen dengan metode inferensi 9. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti bersyarat

	10. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti tak langsung
Pembelajaran 4. Geometri dan Trigonometri	
1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geomteri datar 2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geometri ruang 3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geometri transformasi 4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan trigonometri	1. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep segitiga 2. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep segiempat 3. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep lingkaran 4. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan kedudukan titik, garis dan bidang dalam ruang 5. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan jarak dalam ruang 6. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan sudut dalam ruang 7. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep pencerminan 8. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep translasi 9. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep rotasi 10. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep dilatasi 11. Menyelesaikan masalah sudut pada bidang datar dengan menggunakan identitas trigonometri

	12. Menyelesaiakn masalah menggunakan konsep inver fungsi trigonometri 13. Menyelesaikan masalah trigonometri denganmmenggunakan rumus jumlah dan selisih fungsi trigonometri
Pembelajaran 5. Kalkulus	
1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi 2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan 3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral	1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit sepihak 2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit tak hingga 3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kekontinuan limit 4. Menyelesaikan masalah menggunakan konsep turunan fungsi 5. Menyelesaikan masalah optimalisasi menggunakan konsep turunan fungsi 6. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan integral tertentu 7. Menggunakan konsep integral tertentu untuk menentukan luas bidang 8. Menggunakan konsep integral tertentu untuk menentukan luas benda putar
Pembelajaran 6. Kombinatorika dan Peluang	

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kaidah pencacah, permutasi, dan kombinasi 2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan peluang kejadian 3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pemusatan data dan penyebaran	1. Menganalsis kaidah pencacahan melalui masalah kontekstual 2. Menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan konsep permutasi 3. Menyelesaikanmasalah kontekstual dengan konsep kombinasi 4. Menerapkan konsep peluang suatu kejadian untuk menyelesaikan masalah kontekstual 5. Menetukan ukuran pemusatan data berkelompok 6. Menetukan ukuran penyebaran data berkelompok

C. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi pada bahan belajar mandiri calon guru P3K ini disusun dalam dua bagian besar, bagian pertama adalah pendahuluan dan bagian berikutnya adalah pembelajaran-pembelajaran.

Bagian Pendahuluan berisi deskripsi singkat, Peta Kompetensi yang diharapkan dicapai setelah pembelajaran, Ruang Lingkup, dan Petunjuk Belajar. Bagian Pembelajaran terdiri dari lima bagian, yaitu bagian Kompetensi, Indikator Pencapaian Kompetensi, Uraian Materi, Latihan Soal/Kasus, dan Rangkuman. Latihan/Kasus akan diberikan kunci dan pembahasan di bagian lampiran bahan belajar mandiri. Bahan belajar mandiri diakhiri dengan Penutup, Daftar Pustaka, dan Lampiran.

Rincian materi pada bahan belajar mandiri bagi calon guru P3K adalah substansi materi esensial terklait Bilangan, Aljabar dan Program Linear, Logika Matematika, Geometri dan Trigonometri, Kalkulus, serta Kombinatorika dan Statistika.

D. Petunjuk Belajar

Secara umum, cara penggunaan bahan belajar mandiri bagi calon guru P3K pada setiap Pembelajaran disesuaikan dengan skenario setiap penyajian susbstansi materi bidang studi. Bahan belajar mandiri ini dapat digunakan dalam kegiatan peningkatan komptensi guru bidang studi, baik melalui untuk moda mandiri, maupun moda daring yang menggunakan konsep pembelajaran bersama dalam komunitas pembelajaran secara daring.

Gambar 1. Alur Pembelajaran Bahan Belajar Mandiri

Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa akses ke bahan belajar mandiri dapat melalui SIMPB, dimana bahan belajar mandiri akan didapat secara mudah dan dipalejari secara mandiri oleh calon Guru P3K. Bahan belajar mandiri dapat di unduh dan dipelajari secara mandir, system LMS akan memberikan perangkat ajar lainnya dan latihan-latihan soal yang dimungkinkan para guru untuk berlatih.

Sistem dikembangkan secara sederhana, mudah, dan ringan sehingga *user friendly* dengan memanfaatkan komunitas pembelajaran secara daring, sehingga segala permasalahan yang muncul dalam proses pembelajaran mandiri dapat di selesaikan secara komunitas, karena konsep dari bahan belajar ini tidak ada pendampingan Narasumber/Instruktur/Fasilitator sehingga komunitas pembelajaran menjadi hal yang sangat membantu guru.

Pembelajaran 1. Bilangan

A. Kompetensi

Penjabaran model kompetensi yang selanjutnya dikembangkan pada kompetensi guru bidang studi yang lebih spesifik pada pembelajaran 1. Bilangan. Ada beberapa kompetensi guru bidang studi yang akan dicapai pada pembelajaran ini, kompetensi yang akan dicapai pada pembelajaran ini adalah guru P3K mampu:

1. Menjelaskan berbagai sistem bilangan
2. Menerapkan konsep keterbagian, FPB, dan KPK untuk memecahkan masalah
3. Menggunakan pola bilangan dalam pemecahan masalah
4. Menggunakan konsep barisan dan deret untuk memecahkan masalah
5. Menerapkan konsep dan sifat bentuk akar untuk menyelesaikan masalah
6. Menerapkan konsep dan sifat logaritma untuk menyelesaikan masalah

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Dalam rangka mencapai komptensi guru bidang studi, maka dikembangkanlah indikator-indikator yang sesuai dengan tuntutan kompetensi guru bidang studi.

Indikator pencapaian komptensi yang akan dicapai dalam pembelajaran 1. Bilangan adalah sebagai berikut.

1. Menerapkan operasi pada bilangan dengan kriteria tertentu
2. Menggunakan berbagai sistem bilangan dalam memecahkan masalah matematika
3. Mendeskripsikan pengertian keterbagian, FBP, dan KPK
4. Menggunakan konsep keterbagian, FPB, dan KPK untuk memecahkan masalah
5. Menemukan pola bilangan
6. Menentukan susunan bilangan berikutnya berdasarkan pola yang tersedia
7. Menentukan rumus suku ke-n barisan aritmatika
8. Menetukan rumus suku ke-n barisan geometri
9. Menggunakan rumus jumlah n suku pertama deret aritmatika
10. Menggunakan rumus jumlah n suku pertama barisan geometri

11. Mendskripsikan konsep dan sifat bentuk akar
12. Menggukan konsep dan sifat bentuk akar untuk memecahkan masalah
13. Mendskripsikan konsep dan sifat logaritma
14. Menggukan konsep dan sifat logaritma untuk memecahkan masalah

C. Uraian Materi

1. Sistem Bilangan

- **Bilangan Asli**

  Himpunan bilangan yang paling awal digunakan manusia adalah himpunan bilangan yang digunakan untuk mencacah (*to count*) banyak objek. Misal untuk mencacah banyak ternak, banyak rumah, dan sebagainya. Himpunan bilangan ini disebut himpunan bilangan asli (*natural numbers*). Notasi atau lambang untuk himpunan bilangan asli adalah $\mathbb{N}$ (internasional) atau A (Indonesia). Pada modul ini akan digunakan notasi $\mathbb{N}$ sehingga ditulis

$$N = \{1, 2,3, 4,5, 6,7,8, 9,10, 11, 12, ...\}$$

a. Sifat tertutup

Jika dua bilangan sebarang diambil dari suatu himpunan bilangan H dan hasil penjumlahan tersebut adalah bilangan dalam H maka himpunan bilangan H tertutup terhadap operasi penjumlahan (*closure property*).

Sifat tertutup operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka berlaku $a + b$ merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan (*closed for addition)*.

Contoh:

Selidikilah, apakah himpunan $K = \{1,2, 3,4, 5,6, 7,8,9, 10\}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan berikan alasannya? Solusi: Himpunan K tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan karena terdapat bilangan 5, 7 K dan 5 + 7 = 12, dengan $12 \notin K$.

b. Definisi perkalian

Perkalian (multiplication) dinyatakan sebagai penjumlahan berulang. Perkalian dinyatakan sebagai berikut:

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \cdots b}_{a\ faktor}$$

Sifat tertutup operasi perkalian pada $\mathbb{N}$

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka $a \times b$ juga merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi perkalian (*closed for multiplication*).

Contoh:

Diberikan himpunan B = {1, 2} dan untuk setiap a, b dalam B, didefinisikan

$a \times a = aa$; $b \times b = bb$; $a \times b = ab\ dan\ b \times a = ba$.

Himpunan B tertutup terhadap operasi perkalian karena seluruh hasil perkalian yang mungkin terjadi berada di dalam B, yaitu $1 \times 1 = 1$; $1 \times 2 = 2$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$

Soal : Coba Anda buat suatu himpunan bilangan asli A, dengan tiga anggota dan suatu operasi pada A sehingga operasi tersebut tertutup pada A.

c. Sifat komutatif dan asosiatif

Untuk sebarang bilangan asli a,, dan c berlaku

i. Sifat komutatif

Pada penjumlahan: $a + b = b + a$

Pada perkalian: $ab = ba$

ii. Sifat asosiatif

Pada penjumlahan: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Pada perkalian: $(ab)c = a(bc)$

Sifat komutatif dapat kita gunakan untuk menyusun urutan bilangan yang akan dioperasikan. Sedangkan sifat asosiatif dapat kita gunakan untuk mengelompokkan bilangan-bilangan yang akan dioperasikan.

d. Sifat distributif

Misalkan a,b dan c adalah sebarang bilangan asli, maka berlaku $a(b + c) = ab + ac$.

Pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ berlaku sifat distributif penjumlahan terhadap perkalian.Bukti sebagai latihan

e. Definisi pengurangan

a, b dan x bilangan asli, operasi pengurangan didefinisikan dalam bentuk penjumlahan sebagai berikut : $a - b = x \leftrightarrow a = b + x$.

Berdasarkan definisi pengurangan, selidikilah apakah sifat komutatif juga berlaku untuk operasi pengurangan dan pembagian dua bilangan asli. Jelaskan jawaban Anda!

Untuk menunjukkan himpunan $\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan, cukup ditunjukkan satu contoh penyangkal, sebagai berikut.

Dipilih $2, 3\ N$ dan didapat $2 - 3 = x\ N$, karena menurut definisi pengurangan, $2 = 3 + x$ dan tidak terdapat $x \in N$ sehingga $2 = 3 + x$. Jadi, himpunan $\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan.

- **Bilangan Bulat**

  Mula-mula orang hanya memerlukan himpunan bilangan asli untuk perhitungan sehari-hari, misalnya seorang peternak mencacah banyak hewan ternak yang dimilikinya. Pada suatu saat, sang peternak tersebut mendapat musibah karena semua hewan ternaknya mati terserang wabah penyakit. Misalkan semula peternak tersebut mempunyai 100 ekor ternak. Karena mati semua maka hewan ternaknya habis tidak tersisa. Dalam kasus peternak tersebut, operasi hitung yang terjadi adalah 100 − 100. Untuk semesta himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, kita tidak dapat menemukan suatu bilangan yang memenuhi hasil operasi 100 − 100. Oleh karena itu perlu dilakukan perluasan dengan menambah satu bilangan baru, yaitu 0 yang merupakan hasil operasi 100 − 100. Himpunan bilangan asli yang sudah diperluas dengan menambah bilangan 0 tersebut dinamakan himpunan bilangan cacah (*whole numbers*), dinotasikan dengan $\mathbb{W}$. Dengan demikian $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

Himpunan bilangan cacah diperluas lagi dengan menambahkan lawan dari setiap bilangan asli. Sebagai contoh, lawan dari bilangan 3, yang dinotasikan dengan −3, adalah suatu bilangan yang jika ditambahkan dengan 3 akan memberikan hasil 0. Jika lawan dari semua bilangan asli tersebut ditambahkan ke dalam himpunan bilangan cacah $\mathbb{W}$, maka akan diperoleh himpunan bilangan baru yang dinamakan himpunan bilangan bulat (*integers*), dan dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ (berasal dari bahasa Jerman "*Zahlen*"). Dengan demikian $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat diklasifikasikan ke dalam tiga kelompok, yaitu:

1) himpunan bilangan bulat positif: {1, 2, 3, 4, …}
2) himpunan bilangan nol: {0}
3) himpunan bilangan bulat negatif: {…, −4, −3, −2, −1}.

a. Pembagian bilangan bulat

Pembagian didefinisikan sebagai lawan dari operasi perkalian. Jika a dan b masing-masing adalah bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka pembagian $a \div b$, dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dan didefinisikan sebagai $\frac{a}{b} = z \text{ berarti } a = bz$

Karena pembagian didefinisikan dalam bentuk perkalian, aturan-aturan pembagian bilangan bulat identik dengan aturan-aturan perkalian bilangan bulat. Hal yang perlu diperhatikan adalah pada pembagian $a \div b$, syarat $b \neq 0$ harus dipenuhi karena pembagian dengan 0 tidak didefinisikan

Perhatikan dua situasi berikut.

1) Pembagian bilangan bukan 0 dengan 0.

$$a \div 0 \quad \frac{a}{0} = x$$

Menurut definisi pembagian, bilangan x seharusnya adalah bilangan yang menyebabkan $a = 0 \times x$. Akan tetapi $0 \times x = 0$ untuk setiap x. Karena diketahui $a \neq 0$, maka situasi tersebut menjadi tidak mungkin. Dengan demikian $a \div 0$ tidak ada atau tidak didefinisikan.

2) Pembagian 0 dengan 0.

$$a \div 0 \quad \frac{0}{0} = x$$

Berdasarkan kasus $\frac{a}{b}$, $\neq 0$, jelaskan makna $\frac{0}{0}$ dan apakah terdapat suatu
bilangan x yang menyebabkan $0 \div 0$ menjadi bermakna?

Menurut definisi pembagian, jelas bahwa setiap nilai x dapat memenuhi karena $0 \times x = 0$ untuk setiap x, sehingga menjadikan kebingungan. Perhatikan contoh berikut:

Jika $\frac{0}{0} = 2$ maka $0 \times 2 = 0$ dan jika $\frac{0}{0} = 5$ maka $0 \times 5 = 0$.

Karena perkalian 0 masing-masing dengan 2 dan 5 menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 0, maka dapat kita simpulkan bahwa $2 = 5$. Hal ini jelas salah sehingga $0 \div 0$ dinyatakan sebagai tidak tentu (*indeterminate*).

Himpunan $\mathbb{Z}$ tidak tertutup terhadap operasi pembagian. Untuk membuktikan, pilih 4, 5 $\mathbb{Z}$ dan $4 \div 5 = \frac{4}{5}$, dengan $\frac{4}{5} \notin Z$.

b. Sifat tertutup bilangan bulat

1) tertutup terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua a, $b \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$.
2) tertutup terhadap operasi perkalian, yaitu untuk semua a, $b \in \mathbb{Z}$, maka $(a \times b) \in \mathbb{Z}$.

c. Sifat asosiatif bilangan bulat

1) asosiatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua a, b, $c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2) asosiatif terhadap operasi perkalian, yaitu untuk semua a, b, $c \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

Sifat Komutatif Bilangan Bulat

1) komutatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk a,b $\in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$. b)

2) komutatif terhadap operasi perkalian, yaitu untuk a,b, $c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times b = b \times a$.

d. Sifat distributif bilangan bulat

Untuk a, b, $c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

e. Elemen identitas

1) terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen 0 $\in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.
2) terhadap operasi perkalian, yaitu terdapat dengan tunggal elemen $1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.

f. Invers penjumlahan

Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dengan 0 merupakan identitas penjumlahan.

g. Aturan kanselasi bilangan bulat

1) Terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua $a, x, y \in Z$, apabila $a + x = a + y$ maka $x = y$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $a + x = a + y$ maka $x = y$.

$a + x = a + y$	hipotesis
$-a + (a + x) = -a + (a + y)$	kedua ruas ditambah $-a$
$(-a + a) + x = (-a + a) + y$	mengapa?
$0 + x = 0 + y$	mengapa?
$x = y$	mengapa?

2) Terhadap operasi perkalian, yaitu untuk $a, x, y \in Z$, jika $a \neq 0$ dan $a \times x = a \times y$ maka $x = y$

   Coba Anda buktikan aturan kanselasi perkalian dengan kontraposisi dari implikasinya dan Anda bandingkan kedua cara bukti tersebut !

- **Bilangan Rasional**

Kebutuhan manusia yang semakin berkembang, khususnya terkait dengan keakuratan dalam perhitungan dan pengukuran menyebabkan perlunya perluasan sistem himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Untuk keperluan ini, dibentuk sistem bilangan baru yang disebut himpunan bilangan rasional.

Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, adalah himpunan semua

bilangan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat

dan $b \neq 0$.

Perhatikan bahwa bilangan rasional berbentuk pecahan. Pada aritmetika jika suatu bilangan dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ berarti $a \div b$, dengan a dinamakan pembilang (*numerator*) dan b dinamakan penyebut (*denominator*). Apabila a dan b keduanya

bilangan bulat, maka $\frac{a}{b}$ dinamakan sebagai:

1) pecahan biasa (*proper fraction*) jika $a < b$
2) pecahan tak biasa (*improper fraction*) jika $a > b$
3) bilangan cacah (*whole numbers*) jika b membagi habis a

Untuk setiap bilangan rasional $\frac{a}{b}$ yang tidak sama dengan 0, terdapat suatu invers

perkalian $\frac{b}{a}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Untuk $\frac{a}{b} = 0$, kenapa tidak berlaku?

Perhatikan bahwa $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba}$ Bentuk $\frac{b}{a}$ = 0, sering dinamakan sebagai kebalikan (reciprocal) dari $\frac{a}{b}$

a. Sifat dasar pecahan

Sifat dasar pecahan (*fundamental property of fractions*) yaitu jika $\frac{a}{b}$ adalah sebarang bilangan rasional dan x adalah sebarang bilangan bulat yang tidak sama dengan 0, maka berlaku

$$\frac{a \times x}{b \times x} = \frac{x \times a}{x \times b} = \frac{a}{b}$$

Langkah-langkah untuk menyederhanakan suatu pecahan, sebagai berikut :

1) tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut,
2) gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan tersebut.

Contoh:

Sederhanakan pecahan berikut:

1) $\frac{24}{30}$
2) $\frac{300}{144}$

Solusi

1) Langkah pertama tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut.

$24 = 2^3 \cdot 3^1$

$30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$FPB(24,30) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6$

Selanjutnya gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan.

$$\frac{24}{30} = \frac{6.2^2}{6.5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

2) Dengan cara pada a., Anda selesaikan soal b dengan cepat dan tepat

Operasi hitung bilangan rasional

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah bilangan-bilangan rasional, maka berlaku :

1) terhadap operasi penjumlahan berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
2) terhadap operasi pengurangan berlaku $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{(ad-bc)}{bd}$
3) terhadap operasi perkalian berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
4) terhadap operasi pembagian berlaku $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, dengan $\frac{c}{d} \neq 0$.

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (dengan bilangan bulat bukan 0).

Contoh

Buktikan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Misalkan $\frac{x}{y}$

dan $\frac{w}{z}$ adalah sebarang dua bilangan rasional maka x, y, w, z $bilangan\ real$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Menurut definisi penjumlahan, $\frac{x}{y} + \frac{w}{z} =$
$\frac{xz + wy}{yz}$

Karena $x, y, w, z\ bilangan\ real y \neq 0$, $z \neq 0\ maka\ yz \neq 0$ sehingga
$\frac{xz+wy}{yz}$

bilangan rasional

b. Sifat tertutup bilangan rasional

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$,

maka berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$.

2) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$,

maka $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \in \mathbb{Q}$

c. Sifat asosiatif

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$,

maka berlaku $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$

2) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku

$\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}) = = (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{e}{f}$

d. Sifat komutatif

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$,

maka berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

2) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$,

maka berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

e. Sifat distributif

Untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

f. Elemen identitas

1) terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$

sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

2) terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen 1

1 $\in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

g. **invers**

1) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
2) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
3) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
4) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
5) terhadap operasi perkalian, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, dengan $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, terdapat dengan tunggal elemen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, dengan $\frac{1}{1} = 1$ merupakan identitas perkalian.

- **Bilangan Irrasional**

  Yoga mempunyai sebidang kebun berbentuk persegi dengan luas 1600 m^2. Dia merencanakan untuk membuat pagar di sekeliling kebun tersebut. Berapa panjang pagar yang diperlukan oleh Yoga? Supaya dapat membantu Yoga, terlebih dahulu harus diketahui panjang sisi kebun agar dapat menghitung keliling kebun tersebut. Misal panjang sisi kebun adalah p meter. Berarti Yoga harus menyusun persamaan $p \times p = 1600$. Dalam hal ini $p = 40$ karena $40 \times 40 = 1600$ atau $40^2 =$

1600. Dengan demikian Yoga harus membangun pagar sepanjang 4 × 40 = 160 meter. Proses menentukan nilai p = 40 ini disebut proses melakukan penarikan akar kuadrat atau akar pangkat dua dari 1600 dan ditulis sebagai $\sqrt{1600}$ = 40. Bentuk $\sqrt{1600}$ dibaca “akar kuadrat dari 1600” atau “akar pangkat dua dari 1600”. Penting untuk dicermati bahwa walaupun $(-40) \times (-40) = 1600$, akan tetapi dalam situasi ini panjang sisi tidak mungkin negatif sehingga kita hanya menggunakan nilai p = 40. Secara umum, jika a tidak negatif (a ≥ 0) maka $\sqrt{a}$ adalah suatu bilangan tidak negatif yang hasil kuadratnya sama dengan a. Akar kuadrat dari suatu bilangan nonnegatif n adalah suatu bilangan yang jika dikuadratkan hasilnya adalah n. Secara notasi, akar kuadrat positif dari n, dinyatakan dengan $\sqrt{n}$, didefinisikan sebagai suatu bilangan sedemikian hingga $\sqrt{n}\,\sqrt{n} = n$

Secara umum dapat disiimpulkan :

- Jika $a \geq 0$, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika dan hanya jika $b^n = a$ dan $b \geq 0$.
- Jika $a < 0$ dan n bilangan ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika dan hanya jika $b^n = a$.

Anda coba untuk mencari penyelesaian p^2 = 2 ?. Karena tidak dapat ditemukan bilangan rasional p sedemikian hingga p^2 = 2, maka $\sqrt{2}$ disebut bilangan irrasional. Himpunan bilangan irrasional adalah himpunan bilangan yang representasi desimalnya tidak berhenti (nonterminating) atau tidak berulang (*nonrepeating*).

Beberapa contoh bilangan irrasional selain $\sqrt{2}$ misalnya $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$.

Contoh bilangan irrasional yang lain adalah bilangan π yang merupakan rasio keliling lingkaran terhadap diameternya dan bilangan e yang merupakan bilangan yang digunakan sebagai bilangan dasar dalam pertumbuhan dan peluruhan. Nilai π sebesar 3,141592654 dan e adalah adalah 2,718281828 yang diperoleh dengan menggunakan kalkulator hanya berupa nilai pendekatan, bukan nilai eksak.

Contoh

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode kontradiksi.

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irrasional. Artinya $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional. Karena $\sqrt{2}$ bilangan rasional maka bentuk $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

dengan m dan n merupakan bilangan bulat dan faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1. Selanjutnya kedua ruas dikuadratkan, diperoleh

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$m^2 = 2n^2$$

Perhatikan bahwa bentuk $m^2 = 2n^2$ menyebabkan m^2 merupakan bilangan genap, menurut definisi bilangan genap. Akibatnya m juga merupakan bilangan genap. Karena m bilangan genap maka $m = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Kemudian substitusikan persamaan $m = 2k$ ke persamaan $m^2 = 2n^2$, diperoleh $(2k)^2 = 2n^2$ atau $4k^2 = 2n^2$. Kedua ruas persamaan dibagi dengan 2, diperoleh $n^2 = 2k^2$. Hal ini berakibat n^2 merupakan bilangan genap dan n juga bilangan genap. Padahal jelas bahwa m merupakan bilangan genap. Sebagai akibatnya, baik m dan n mempunyai faktor persekutuan terbesar 2. Hal ini bertentangan dengan pengadaian bahwa m dan n mempunyai faktor persekutuan 1. Terjadi kontradiksi. Pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrrasional.

a. Operasi dengan bentuk akar

Beberapa syarat yang perlu dipenuhi adalah menyederhanakan suatu bentuk akar yang merupakan bilangan irasional. Suatu bentuk akar dapat disederhanakan (*simplified*) jika:

1) Bilangan di bawah tanda akar (*radicand*) tidak mempunyai faktor dengan pangkat lebih besar dari 1
2) Bilangan di bawah tanda akar tidak dituliskan dalam bentuk pecahan atau menggunakan pangkat negatif
3) Tidak ada notasi akar pada penyebut dari pecahan

b. Aturan bentuk akar

Misal a dan b adalah bilangan-bilangan positif, maka

4) $\sqrt{0} = 0$

5) $\sqrt{a^2} = a$

6) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

7) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- **Bilangan Real**

Himpunan bilangan real merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}$

a. **Representasi desimal**

Perhatikan representasi desimal dari sebuah bilangan real. Jika bilangan tersebut adalah bilangan rasional, maka representasi desimalnya adalah berhenti (*terminating*) atau berulang (*repeating)*.

Contoh: Dengan menggunakan kalkulator, tentukan jenis representasi desimal dari bilangan-bilangan rasional berikut.

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{6}$

4) $\frac{1}{7}$

Solusi

1) $\frac{1}{4}$ = 0,25 merupakan desimal berhenti (terminating decimal)

2) $\frac{2}{3}$ = 0,666 merupakan desimal berulang (repeating decimal),

3) $\frac{1}{6}$ = 0,166… merupakan desimal berulang (repeating decimal)

4) $\frac{1}{7} \approx 0{,}143$ tampilan layar kalkulator menunjukkan 0,1428571429

Bandingkan hasil perhitungan menggunakan kalkulator dengan menggunakan pembagian bersusun. Apabila suatu desimal berulang, kita menggunakan tanda bar "‾" untuk menunjukkan banyak angka perulangannya. Sebagai contoh:

- Perulangan satu angka $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$
- Perulangan dua angka $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$; ; $\frac{1}{6}$= 0,16

Bilangan real yang merupakan bilangan irrasional mempunyai representasi desimal yang tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*).

Sebagai contoh:

$\sqrt{2}$ = 1,414213 …

π = 3,141592 …

e = 2,71828 …

Pada bilangan-bilangan tersebut tidak terdapat pola perulangan sehingga merupakan bilangan irrasional.

Beberapa cara untuk mengklasifikasikan bilangan real, sebagai berikut:

1) Bilangan positif, bilangan negatif, atau nol
2) Bilangan rasional atau bilangan irrasional
   - Jika representasi desimalnya berhenti, maka merupakan bilangan rasional
   - Jika representasi desimalnya berulang, maka merupakan bilangan rasional
   - Jika bilangan tersebut tidak mempunyai representasi desimal yang berhenti atau berulang, maka merupakan bilangan irrasional

b. Sifat-sifat himpunan bilangan Real

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka berlaku

	Penjumlahan	Perkalian
Tertutup	(a + b) $\in \mathbb{R}$	ab $\in \mathbb{R}$
Asosiatif	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Komutatif	$a + b = b + a$	$ab = ba$

Distributif perkalian terhadap penjumlahan	$a(b + c) = ab + ab$

c. **Elemen identitas**

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$. Bilangan 0 tersebut dinamakan elemen identitas pada penjumlahan (*identity for addition*).
2) Terhadap operasi penjumlahan yaitu terdapat bilangan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $1 \times a = a \times 1 = a$.
   Bilangan 1 tersebut dinamakan elemen identitas pada perkalian (*identity for multiplication*).

d. **Sifat Invers**

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, terdapat dengan tunggal bilangan $(-a) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers penjumlahan (additive inverse) dari a, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
2) terhadap operasi perkalian yaitu untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, terdapat dengan tunggal bilangan $a^{-1} = (\frac{1}{a}) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers perkalian (*multiplication inverse*) dari a, sehingga $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$.

Perhatikan contoh berikut. $5 \times \ldots = \ldots \times 5 = 1$

Akan dicari bilangan yang jika dikalikan dengan 5 hasilnya 1.

$5 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 5 = 1$

Karena $\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$, maka $\frac{1}{5}$ merupakan invers dari 5 pada perkalian.

- **Contoh Pembuktian Terkait Sistem Bilangan**

Uraian contoh pembuktian terkait sistem bilangan.

a. Buktikan bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode pembuktian langsung.

Misalkan m dan n merupakan sebarang bilangan bulat genap. Akan dibuktikan bahwa $m + n$ merupakan bilangan bulat genap. Menurut definisi bilangan genap, $m = 2r$ dan $n = 2s$ untuk r dan s sebarang anggota bilangan bulat.

Maka

$$\begin{aligned} m + n &= 2r + 2s \\ &= 2(r + s) \end{aligned}$$

Misalkan $t = r + s$. Perhatikan bahwa t jelas merupakan bilangan bulat karena t adalah hasil penjumlahan bilangan-bilangan bulat. Sehingga bentuk $m + n$ dapat dituliskan sebagai $m + n = 2t$, dengan t merupakan bilangan bulat. Karena $m + n = 2t$, maka sesuai dengan definisi bilangan genap hasil penjumlahan $m + n$ juga bilangan genap. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

b. Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan bulat ganjil juga merupakan bilangan bulat ganjil.
Coba Anda buktikan, sebagai acuan bahwa m suatu bilangan ganjil jika $m = 2n + 1$, untuk suatu n bilangan bulat.

c. Buktikan bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.
Bukti:
Dibuktikan dengan metode kontradiksi. Andaikan hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional bukan merupakan bilangan irrasional. Dengan kata lain, hasil penjumlahannya merupakan bilangan rasional.
Misalkan terdapat bilangan rasional r dan bilangan irrasional s sedemikian hingga $r + s$ merupakan bilangan rasional.
Menurut definisi bilangan rasional, $r = \frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$, untuk suatu bilangan bulat a,b, c, dan d, dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$. Menggunakan substitusi diperoleh

$$S = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

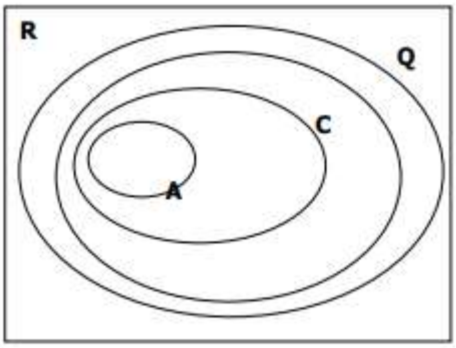
$$\frac{a}{b} + S = \frac{c}{d} \text{ sehingga } \frac{bc-ad}{bd}$$

Perhatikan bahwa bentuk $bc - ad$ dan bd, keduanya merupakan bilangan bulat. Mengapa, jelaskan pendapat Anda. Akibatnya s merupakan hasil pembagian dua bilangan bulat, $bc - ad$ dan bd, dengan $bd \neq 0$. Sehingga menurut definisi bilangan rasional, s merupakan bilangan rasional. Hal ini menyebabkan kontradiksi dengan pemisalan awal bahwa s merupakan bilangan irrasional. Pengandaian salah. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.

2. Keterbagian, FPB, dan KPK

- **Keterbagian**

  Posisi himpunan bilangan bulat dalam himpunan bilangan dapat digambarkan dalam diagram Venn berikut ini:



Gambar 2. Diagram Venn

A = himpunan semua bilangan asli = $\{1,2,3,\dots\}$, C = himpunan semua bilangan cacah = $\{0,1,2,3,\dots\}$, B = himpunan semua bilangan bulat = $\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$, Q = himpunan semua bilangan rasional $= \{\frac{p}{q} \mid p \text{ dan } q \text{ bilangan bulat dengan } q \;\; 0\}$, dan R = himpunan semua bilangan real. Di antara Q dan R ada himpunan bilangan irasional. Sehingga dapat dikatakan, himpunan bilangan real adalah

gabungan antara himpunan bilangan rasional (Q) dengan himpunan semua bilangan irasional.
Dalam himpunan bilangan bulat, dapat dikenai relasi keterbagian. Sifatsifat keterbagian pada bilangan bulat merupakan dasar pengembangan teori bilangan. Pengertian relasi keterbagian disajikan pada Definisi 1.1.

Definisi 1.1
Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) apabila terdapat bilangan bulat k sehingga $b = ak$. Jika a tidak membagi habis b maka dituliskan $a \nmid b$.
Contoh 1.1
3|21 karena terdapat bilangan bulat yakni 7 sehingga 21 = 3.7
$5 \nmid 12$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga 12 = 5. k
−8|0 karena terdapat bilangan bulat yakni 0 sehingga 0 = -8.0

Istilah-istilah lain yang mempunyai arti sama dengan $a|b$ adalah "a faktor dari b" atau "a pembagi b" atau "b kelipatan a". Relasi keterbagian pada bilangan bulat memenuhi sifat-sifat antara lain sebagai berikut:

Teorema 1.1
Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.

Teorema 1.2
Jika $a|b$ dan $a|(b + c)$ maka $a|c$.

Teorema 1.3
Jika $p|q$, maka $p|qr$ untuk semua $r \in$ Z

Teorema 1.4
Jika $p|q$ dan $p|r$, maka $p|q + r$

- **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)**

  Untuk setiap bilangan bulat a paling sedikit memiliki dua faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri. Suatu bilangan bulat dapat memiliki faktor selain 1 dan dirinya sendiri. Sebagai contoh 20 memiliki faktor 1, 2, 4, 5, 10 dan 20, sedangkan 30 memiliki faktor 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 dan 30. Dari contoh ini diperoleh bahwa 1, 2, 5 dan 10 merupakan faktor dari 20 dan sekaligus faktor dari 30. Fakta tersebut mengantarkan ke konsep faktor persekutuan, dan faktor persekutuan terbesar.

  Definisi 1.2
  Suatu bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b apabila $d|a$ dan $d|b$.
  Perlu diketahui bahwa untuk setiap dua bilangan bulat a dan b memiliki paling sedikit satu faktor persekutuan yaitu 1. Jika d adalah faktor persekutuan dari a dan b maka $d|ma + nb$ untuk setiap bilangan bulat m dan n. Jika a dan b dua bilangan bulat tak nol, maka a dan b hanya memiliki sejumlah hingga faktor dan 8 oleh karenanya himpunan faktor persekutuan dari a dan b juga berhingga. Karena elemen-elemen himpunan faktor persekutuan dari a dan b merupakan bilanganbilangan bulat maka himpunan tersebut memiliki elemen terbesar. Bilangan bulat terbesar ini disebut faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b. Konsep FPB disajika pada Definisi 1.3

  Definisi 1.3
  Bilangan bulat positif d disebut FPB dari a dan b jika dan hanya jika:
  (i). $d|a$ dan $d|b$
  (ii). jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.
  Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB(a, b)$. Beberapa hal yang perlu diketahui tentang FPB antara lain:
  (i). FPB (0,0) tidak didefinisikan.
  (ii). FPB (a, b) selalu bilangan bulat positif, sehingga FPB $(a, b) \geq 1$.
  (iii). FPB (a, b) = FPB $(a, -b)$ = FPB $(-a, b)$ = FPB $(-a, -b)$.
  Contoh 1.2

a). FPB dari 30 dan 105 adalah 15, sehingga ditulis FPB (30, 105) = 15.

b). FPB dari 9 dan 20 adalah 1, sehingga ditulis FPB (9,20) = 1.

Teorema 1.5 Jika FPB (a, b) = d maka FPB (a: d, b: d) = 1.

Contoh 1.3

Karena FPB (24,30) = 6 maka FPB (24: 6, 30: 6) = FPB (4,5) = 1.

Definisi 1.4

Bilangan bulat a dan b disebut relatif prima (saling prima) jika FPB (a, b) = 1.

Dari contoh 1.2 diperoleh bahwa 9 dan 20 saling prima, sedangkan dari contoh 1.3 diperoleh bahwa 4 dan 5 saling prima.

Jika $|a|$ dan $|b|$ adalah bilangan-bilangan bulat yang kecil maka FPB (a, b) dapat dihitung dengan mudah (singkat). Tidak demikian halnya $|a|$ dan $|b|$ adalah bilangan-bilangan yang besar. Sebagai contoh jika a = 26020473 dan b = 26020867 maka FPB (a, b) tidak dapat dihitung dengan singkat. Berikut ini akan sajikan cara yang efisien untuk menentukan FPB dari dua bilangan bulat.

Teorema 1.6 (Algoritma Pembagian Bilangan Bulat)

Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga b = qa + r dengan 0 ≤ r < a.

Contoh 1.4

Jika a = 24 dan b = 81 maka q = 3 dan r = 9, sebab 81 = (3). (24) + 9.

Terlihat bahwa $FPB\ (81,24)\ =\ 3$ dan $FPB\ (24,9)\ =\ 3$.

Jika a dan b sebarang bilangan bulat, maka Teorema 1.6 tetap berlaku tetapi dengan syarat 0 ≤ r < $|a|$.

Teorema 1.7

Jika b = qa + r, maka $FPB\ (b, a)\ =\ FPB\ (a, r)$.

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1.6 dan Teorema 1.7 dapat ditentukan FPB dari sebarang dua bilangan bulat.

Contoh 1.5

Tentukan FPB $(5767{,}4453)$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 1.6 berkali-kali maka diperoleh:

$$5767 = 4453\,.\,1 + 1314$$

$$4453 = 1314\,.\,3 + 511$$

$$1314 = 511.2 + 292$$

$$511 = 292\,.\,1 + 219$$

$$292 = 219\,.\,1 + 73$$

$$219 = 73\,.\,3 + 0$$

Berdasarkan Teorema 1.7 diperoleh $FPB(5767{,}4453) = FPB(4453{,}1314) = FPB(1314{,}511) = FPB(511{,}292) = FPB(292{,}219) = FPB(219{,}73) = FPB(73{,}0) = 73$.

Jadi $FPB(5767{,}4453) = 73$.

Teorema 1.8

Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat positif. Menggunakan algoritma pembagian diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$a = bq + r$, dengan $0 \leq r < b$

$b = rq_1 + r_1$, dengan $0 \leq r_1 < r$

$r = r_1q_2 + r_2$, dengan $0 \leq r_2 < r_1$

$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$, dengan $0 \leq r_k < r_{k-1}$

$r_{k-1} = r_kq_k + 1$.

Diperoleh $FPB(a, b) = rk$.

Teorema 1.9

Untuk setiap bilangan bulat tak nol a dan b terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $FPB(a,b) = am + bn$. Petunjuk: Teorema 1.9 dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema 1.8.

Contoh 1.6

Jika $a = 247\ dan\ b = 299$, maka diperoleh:

$$299 = 247 . 1 + 52$$

$$247 = 52 . 4 + 39$$

$$52 = 39 . 1 + 13$$

$$39 = 13 . 3$$

Berdasarkan Teorema 1.6 diperoleh $FPB(a, b)$ = 13.

Selanjutnya akan ditentukan bilangan bulat m dan n sehingga

$13 = 247m + 299n$.

Caranya sebagai berikut.

$$13 = 52 - 39 . 1$$

$$= 52 - (247 - 52 . 4)$$

$$= 52 . 5 - 247$$

$$= (299 - 247 . 1) . 5 - 247$$

$$= 299 . 5 - 247 . 6$$

Jadi $m = -6\ dan\ n = 5$.

Akibat Teorema 1.9

Jika a dan b relatif prima maka ada bilangan bulat m dan n sehingga $am + bn = 1$.

Teorema 1.10

Jika $d|ab$ dan $FPB(d, a) = 1$, maka $d|b$.

Teorema 1.11 Jika $c|a$ dan $c|b$ dengan $(a, b) = d$ maka $c|d$.

Contoh 1.7

Karena $2|32$ dan $2|40$, maka $2|8 = FPB\ (32,40)$.

- **Bilangan Prima dan Komposit**

  Setiap bilangan asli yang lebih besar dari 1mempunyai paling sedikit dua buah pembagi atau faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

1. Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan hanya tepat mempunyai dua buah pembagi yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.
2. Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.
3. Bilangan 1 hanya mempunyai sebuah pembagi, yaitu 1 itu sendiri, sehingga 1 bukan bilangan prima dan bukan bilangan komposit. Ini adalah alasan mengapa 1 merupakan bilangan khusus.
4. Tidak ada bilangan asli yang sekaligus merupakan bilangan prima dan bilangan komposit.
5. Satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2.
6. Jika n adalah bilangan asli lebih dari 1 yang tidak mempunyai pembagi bukan merupakan bilangan prima kurang dari atau sama dengan $\sqrt{n}$, maka n merupakan bilangan prima.

   Contoh bilangan prima 2, 3, 5, 7,29
   Cobalah Anda membuat rumus eksplisitnya dan apa kesimpulannya !.

- **Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)**

  Kelipatan setiap bilangan dari suatu kelompok bilangan bulat dinamakan sebagai kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut. Dari kelipatan persekutuan-kelipatan persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, kelipatan persekutuan yang paling kecil disebut Kelipatan Persekutuan Terkecildan disingkat KPK.

  Notasi untuk KPK dari bilangan bulat m dan n adalah KPK[m,n].

  Contoh

  Hitung KPK dan FPB dari 198, 216 dan 252.

  Penguraian atas faktor-faktor prima dari bilangan-bilangan tersebut adalah:

$$198 = 2 . 3^2 . 11 = 2^1 . 3^2 . 11^1$$

$$216 = 2^3 . 3^3 = 2^3 . 3^3$$

$$252 = 2^2 . 3^2 . 7 = 2^2 . 3^2 . 7^1$$

Jadi diperoleh:

$FPB(198, 216, 252) = 2\, min(1,3,2) . 3\, min(2,3,2) . 7(0,0,1)\ ,11 min(1,0,0)$

$= 2^1 . 3^2 . 7^0 . 11^0 = 18.$

$KPK\ [198,216,252]$

$= 2\, maks(1,3,2) . 3\, maks(2,3,2) . 7maks(0,0,1) . 11maks(1,0,0)$

= $2^3 . 3^3 . 7^1 . 11^1$

$= 16632$

Definisi 1.6

Bilangan-bilangan bulat $a1, a2, \dots, an$ dengan $ai \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ mempunyai kelipatan persekutuan b jika $ai\ |b$ untuk setiap i. Kelipatan persekutuan bilangan-bilangan bulat $a1, \dots, an$ selalu ada, yaitu $\prod_{i=1}^{n} \quad = a_{1,} . a_{2,} \dots a_n$

Definisi 1.7

Jika $a_{1,} . a_{2,} \dots a_n$ bilangan-bilangan bulat dengan $ai \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari $a_{i,} . a_{2,} \dots a_n$

KPK dari a_1 dan a_2 dituliskan sebagai $KPK\ [a1, a2]$.

KPK dari $a1, a2, \dots, an$ dituliskan sebagai $KPK\ [a1, a2, \dots, an]$.

Teorema 1.16

Jika b suatu kelipatan persekutuan dari $a1, a2, \dots, an$ maka $KPK\ [a1, a2, \dots, an]|b$.

Contoh

Karena 48 merupakan kelipatan persekutuan dari 2, 3, 6 dan 8 maka $24 = KPK[2, 3, 6, 8]|48$.

Teorema 1.17

Jika $m > 0$ maka $KPK[ma, mb] = m \times KPK[a, b]$.

Teorema 1.18

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif, maka $KPK[a, b] \times FPB(a, b) = ab$.

Contoh

Jika n bilangan bulat positif maka $FPB(n, n + 1) = 1$. Akibatnya $KPK[n, n + 1] = n(n + 1)$.

3. Pola Bilangan

Untuk mengawali pembahasan pola bilangan, terlebih dahulu

Gambar 3. Bilangan Berpola

Tiga buah gambar berpola, yang masing-masing berpola segitiga samasisi, berpola persegi panjang, dan berpola persegi. Dalam mempelajari bilangan, ditemukan juga beberapa kumpulan bilangan yang memiliki ciri atau pola tertentu. Pola pada bilangan ini berupa aturan atau rumus yang digunakan dalam menentukan urutan atau letak suatu bilangan dari sekumpulan bilangan yang telah ditentukan.

Definisi

Pola bilangan adalah suatu aturan tertentu yang diberlakukan pada kumpulan bilangan.

Suatu pola bilangan yang diberlakukan pada himpunan bilangan akan menghasilkan susunan bilangan yang berpola dalam himpunan tersebut.

Contoh:

a) Misalkan himpunan S, dengan $S = \{5, 9, 17, 13, 21\}$. Diberikan pola bilangan pada S, sebagai berikut bilangan pertama adalah 5 dan bilangan berikutnya adalah empat lebih besar dari bilangan sebelumnya. Dengan menerapkan pola tersebut didapat sususan bilangan berpola dari S yaitu $5, 9, 13, 17, 21$

b) Dalam memberi nomor rumah di suatu jalan, ditentukan aturan yaitu, rumah yang terletak di sebelah kanan dari arah pintu gerbang harus memiliki nomor genap dan rumah yang berada di sebelah kiri harus bernomor ganjil. Aturan penomoran rumah tersebut membentuk susunan bilangan yang berpola, yaitu pola bilangan genap $2, 4, 6, \dots, 2n$ dan pola bilangan ganjil $1, 3, 5, \dots, (2n - 1)$, dengan n bilangan asli. Pengaturan ini memberikan kemudahan dalam mencari suatu rumah, cukup dengan melihat genap atau ganjil nomor rumah yang dicari.

Untuk memudahkan dalam mengingat, jika memungkinkan suatu pola bilangan dalam himpunan bilangan diberi nama dan namanya disesuaikan dengan bilangan-bialngan penyusunnya.

Contoh :

a) $1, 2, 3, \dots, n$, dinamakan pola n bilangan asli pertama
b) $2, 4, 6, \dots, 2n$ disebut pola n bilangan asli genap pertama.

Suatu pola bilangan dapat dimodifikasi unsur-unsurnya sehingga diperoleh pola bilangan yang baru.

Contoh

Diberikan pola n bilangan genap pertama, yaitu $2, 4, 6, \dots, 2n$. Akan dibentuk pola bilangan baru dengan aturan bahwa suku bilangan pertama 2, suku bilangan kedua hasil jumlahan dua suku pertama, yaitu 6 dan suku bilangan ke-n adalah jumlahan n suku bilangan pertama. Berdasarkan aturan tersebut didapat pola bilangan baru, yaitu $2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6, \dots, 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$, atau $2, 6, 12, 20, 30, \dots, n(n + 1)$. Pola bilangan tersebut dinamakan pola n bilangan persegi panjang pertama.

Contoh

Buatlah dugaan (prediksi) rumus jumlah n bilangan bulat positif ganjil yang pertama.

Solusi.

Mula-mula akan dibuat dugaan pola jumlahan n bilangan bulat positif ganjil yang pertama, untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Berdasarkan nilai-nilai tersebut, kita dapat menduga bahwa jumlah n bilangan bulat positif ganjil yang pertama adalah n^2 , atau

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Perlu diketahui bahwa tidak setiap pola bilangan dapat ditentukan rumus eksplisitnya. Sebagai contoh bilangan prima yaitu $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ yang tidak memiliki rumus eksplisitnya.

4. Barisan dan Deret

- **Barisan Bilangan (sekuens)**

Setiap pola yang diterapkan pada suatu himpunan bilangan akan membentuk suatu susunan bilangan yang memiliki pola. Barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola tertentu sehingga membentuk suatu pola bilangan. Pola yang dimaksud, ditentukan dari hasil membandingkan dua bilangan yang berurutan pada susunan bilangan tersebut dan hasilnya adalah konstan.

Definisi

Barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang hasil perbandingan dua suku bilangan yang berurutan adalah konstan

Contoh :

Berikut adalah suatu pola bilangan yang membentuk barisan bilangan

a. $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$
b. $3, 6, 12, 24, 48, 96$

Terdapat dua jenis pola bilangan yang didapat dari hasil selisih atau hasil pembagian dari bilangan ke-n oleh bilangan ke-(n–1), untuk n bilangan asli. Jika suatu susunan bilangan yang selisih dua bilangan yang berurutan adalah konstan disebut barisan aritmetika. Sedangkan, jika pembagian dua bilangan yang berurutan adalah konstan maka susunan bilangan tersebut disebut barisan geometri. Seperti halnya pola bilangan, suatu barisan bilangan juga dapat diberi nama sesuai dengan karakter pola bilangan yang membentuk barisan itu.

Beberapa contoh barisan bilangan dan namanya, sebagai berikut :

Tabel 3. Barisan bilangan

No	Barisan Bilangan	Nama
1	1, 2, 3, 4, 5, …	Barisan bilangan Asli
2	1, 3, 5, 7, 9, …	Barisan bilangan Asli Ganjil
3	1, 4, 9, 16, 25, …	Barisan bilangan Persegi
4	1, 3, 6, 10, 15, …	Barisan bilangan Segitiga
5	2, 6, 12, 20, 30, …	Barisan bilangan Persegi Panjang

Berdasarkan tabel , didapat barisan 1, 2 adalah barisan aritmetika dan barisan 3 adalah barisan geometri. Sedangkan barisan 4, 5, 6 adalah barisan selain keduanya dan dibahas pada akhir modul ini. Pada penulisan suatu barisan, setiap bilangan yang membentuk barisan bilangan disebut suku barisan dan dinotasikan dengan ui, dengan i adalah indeks ke-i. Setiap dua suku barisan dipisahkan dengan notasi "," (koma). Indeks n pada un menunjukkan banyaknya suku dari barisan, sedangkan notasi un disebut suku umum barisan yang merupakan fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan asli. Untuk n bilangan asli hingga maka barisan bilangannya disebut barisan bilangan hingga.

Secara umum, suatu barisan bilangan dapat disajikan dalam bentuk

$$u_1,\ u_2, u_3, \ldots,\ u_n$$

dengan u_1 adalah suku ke-1, u_2 adalah suku ke-2, dan u_n adalah suku ke-n.

Contoh :

Tentukan rumus umum suku ke-n bagi barisan-barisan berikut ini, jika diketahui sebagai berikut:

a. $4, 6, 8, 10, \ldots$

b. $2, 4, 8, 16, \ldots$

c. $3, -3, 3, -3, \ldots$

Jawab:

a. Barisan $4,6,8,10, \ldots$; adalah barisan dengan suku pertama $u_1 = 4$ dan selisih suku yang berurutan bernilai konstan sama dengan 2. Jadi, $u_n = 2n + 2$.

b. Barisan $2, 4, 8, 16, \ldots$; dapat ditulis sebagai $(2)^1$, $(2)^2$, $(2)^3$, $(2)^4$,. . . ; barisan dengan suku-sukunya sama dengan 2 dipangkatkan bilangan asli. Jadi $u_n = 2^n$

c. Barisan $3, -3, 3, -3, \ldots$; barisan dengan suku pertama $u_1 = 3$ dan perbandingan dua suku berurutan bernilai konstan sama dengan –1. Jadi un = $-3(-1)^n$

Contoh :

Diberikan barisan bilangan yang rumus umum suku ke-n adalah $u_n = 7n - 4$. Tentukan suku pertama dan suku ke-10 dari barisan tersebut.

Jawab

Berdasarkan definisi, diketahui bahwa suku ke-n adalah un=7n– 4. Sehingga didapat suku pertama adalah u_1= 7 . 1 – 4 = 3 dan suku ke-10 adalah u_{10} = 7 . 10 – 4 = 66. Jadi, suku pertama dan suku ke-10 masing-masing adalah $u_1 = 3$ dan $u_{10} = 66$.

Contoh

Diberikan dua barisan yang masing-masing terdiri tiga suku yaitu a, b, c dan d, e, f dengan ketentuan sebagai berikut. Pada barisan pertama berlaku selisih dua suku berurutan adalah tetap, sedangkan barisan kedua berlaku hasil bagi suku berurutan adalah tetap. Jika diketahui b=7, c – a =10, e = b+3 dan f=2e maka tentukan kedua barisan dengan menerapkan sifat-sifat barisan bilangan.

Jawab :

Berdasarkan hipotesis diperoleh bahwa barisan pertama adalah barisan aritmetika, yaitu a, b, c dengan b=7 dan c – a = 10 sehingga diperoleh selisihnya adalah 5 dan barisan adalah 2, 7, 12. Jika e = b+3 dan f = 2e maka diperoleh e=10 sehingga didapat barisan geometrinya adalah 5, 10, 20.

- **Barisan dan Deret Aritmetika**

  a. Barisan Aritmetika

  Bagi Anda yang pernah naik taksi yang menggunakan argometer, pernahkah Anda memperhatikan perubahan bilangan yang tercantum pada argometer? Apakah bilangan-bilangan itu berganti secara periodik dan apakah pergantiannya menuruti aturan tertentu? Jika Anda memperhatikan mulai dari awal bilangan yang tercantum pada argometer dan setiap perubahan yang terjadi, apa yang dapat Anda simpulkan dari barisan bilangan-bilangan tersebut?

  Iwan mencari rumah temannya di Jalan Gambir no.55. Setelah sampai di Jalan Gambir ia memperhatikan bahwa rumah-rumah yang terletak di sebelah kanan jalan adalah rumah-rumah dengan nomor urut genap 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Dengan memperhatikan keadaan itu, kearah manakah Iwan mencari rumah temannya?

  Perubahan bilangan-bilangan pada argometer taksi menuruti aturan tertentu. Setiap dua bilangan yang berurutan mempunyai selisih yang tetap. Barisan bilangan yang seperti itu disebut barisan aritmetika.

  Demikian juga barisan nomor-nomor rumah di atas merupakan barisan bilangan aritmetika. Barisan bilangan ini mempunyai selisih yang tetap antara dua suku yang berurutan. Pada barisan 1, 3, 5, 7, …, suku pertama adalah 1, suku kedua adalah 3, dan seterusnya. Selisih antara dua suku yang berurutan adalah 2. Barisan 2, 4, 6, 8, …, juga mempunyai selisih dua suku yang berurutan selalu tetap yang besarnya 2

b. Rumus suku Ke-n Barisan Aritmetika

Pada barisan aritmetika dengan bentuk umum $u_1, u_2, u_3, \ldots$ dengan u_1 adalah suku pertama, u_2 adalah suku ke-2, u_3 adalah suku ke-3 dan seterusnya. Selisih antara dua suku berurutan disebut juga beda dan diberi notasi b, sehingga $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \cdots = u_n - u_{n-1}$. Misalkan suku pertama u_1 dinamakan a dan beda antara 2 suku berurutan adalah b, maka: $u_1 = a$

$u_2 - u_1 = b \Rightarrow u_2 = u_1 + b = a + b = a + (2 - 1)b$

$u_3 - u_2 = b \Rightarrow u_3 = u_2 + b = a + 2b = a + (3 - 1)\ b$

$u_4 - u_3 = b \Rightarrow u_4 = u_3 + b = a + 3b = a + (4 - 1)b$

$u_5 - u_4 = b \Rightarrow u_5 = u_4 + b = a + 4b = a + (5 - 1)\ b$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas kita dapat menyimpulkan rumus umum suku ke –n adalah:

$u_n = a + (n - 1)\ b$

Dengan u_n = suku ke-n

a = suku pertama dan b = beda

Contoh

Tentukan suku ke-35 dari barisan 3, 7, 11, 15, ...

Jawab:

$u_1 = a = 3$, $b = u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$, $n = 35$

Dengan mensubstitusikan unsur-unsur yang diketahui ke

$u_n = a + (n - 1)b$ diperoleh $u_{35} = 3 + (35 - 1)4 = 139$ Jadi suku ke-35 adalah 139.

Contoh

i. Carilah rumus suku ke-n barisan 60, 56, 52, 48, ...
ii. Suku ke berapakah dari barisan di atas yang nilainya adalah 16?

Jawab:

$u_1 = a = 60$, $b = u_2 - u_1 = 56 - 60 = -4$

a) $u_n = a + (n - 1)b = 60 - 4(n - 1) = 64 - 4\ a$

b) $u_n = 64 - 4n$

$16 = 64 - 4n$

$4n = 48 \Leftrightarrow n = 12$

Contoh

Pada suatu barisan aritmetika suku ke-10 adalah 41 dan suku ke-5 adalah 21. Tentukan suku ke-125

Jawab:

$u_{10} = a + (10 - 1)b = a + 9b = 41$

$u_5 = a + (5 - 1)b = a + 4b = 21$

$5b = 20$

$b = 4 \Rightarrow a = 5$

$u_{125} = a + (125 - 1)4 = 5 + 124(4) = 501$

c. Deret Aritmetika

Tentu Anda sudah mengetahui cerita tentang matematikawan Gauss. Ketika masih di sekolah dasar ia diminta gurunya untuk menjumlahkan 100 bilangan asli yang pertama. Teknik menghitung Gauss kecil sederhana tetapi tidak diragukan lagi keefektifannya. Ia memisalkan S adalah jumlah 100 bilangan asli yang pertama seperti di bawah ini.

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

Kemudian ia menulis penjumlahan itu dengan urutan suku-suku terbalik.

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 1$$

Selanjutnya ia menjumlahkan kedua deret.

$$2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \cdots + 101$$

Karena banyak suku dalam deret itu ada 100, maka penjumlahan itu dapat juga ditulis sebagai: $2S = 100(101) = 10100 \Leftrightarrow S = 5050$

Teknik menghitung Gauss ini yang diikuti selanjutnya untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan aritmetika. Dari barisan aritmetika $u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots$ diperoleh deret aritmetika $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$. Bila jumlah n suku yang pertama dari suatu deret aritmetika dinyatakan dengan Sn maka

$Sn = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$

Misalkan $u_n = k$, maka

$Sn = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$

$Sn = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \cdots + (k - b) + k \ldots$ (1)

ika urutan penulisan suku-suku dibalik maka diperoleh

$Sn = k + (k - b) + (k - 2b) + (k - 3b) + \cdots + (a + b) + a \ldots$ (2)

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat:

$2Sn = (a + k) + (a + k) + (a + k) + (a + k) + \cdots + (a + k) + (a + k)$

$\quad = n(a + k) = n[2a + (n - 1)b]$

Jadi Sn = 1 2 $n(a + k)$

atau $Sn = \frac{1}{2}\ n(a + un) = \frac{1}{2}\ n[(2a + (n - 1)b]$

dengan a = suku pertama, un = suku ke-n, b = beda Jika ditulis dalam bentuk notasi sigma, jumlah n suku pertama deret aritmetika dinyatakan sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{n} a + (n-1)b$$

Dengan demikian jumlah n suku pertama dan $n - 1$ suku pertama deret aritmetika dapat dinyatakan sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$$

Dengan mengurangkan Sn dengan S_{n-1} terlihat dengan jelas bahwa

$u_n = S_n - S_{n-1}$

Contoh

Seorang anak mengumpulkan batu kerikil dalam perjalanan pulang dari sekolah. Tiap hari ia mengumpulkan 5 kerikil lebih banyak dari hari sebelumnya. Jika pada hari pertama ia membawa pulang 1 kerikil, tentukan

a) jumlah kerikil-kerikil tersebut sampai hari ke-n dan bentuk notasi sigma jumlah tersebut
b) rumus jumlah deret tersebut
c) jumlah kerikil pada hari ke-25

Jawab

a) $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} \quad (5k - 4)$

b) $Sn = \frac{1}{2}\ n[(2a + (n - 1)b]$

$= \frac{1}{2}\ n[(2 + (n - 1)5] = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}\ n$

c) $S_{25} = \frac{5}{2}(25)^2 - \frac{3}{2}\ (25) = 1525$

Banyak batu kerikil yang dikumpulkan pada hari ke-25 adalah 1525 buah.

Contoh

Hitunglah jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6

Jawab:

Jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah deret 12 + 18 + 24 + 30 +…+ 96

u_n = 96 disubstitusikan ke $u_n = a + (n - 1)b$

Jadi 96 = 12 + $(n - 1)$6. Dengan menyelesaikan persamaan ini didapat n = 15 Selanjutnya n = 15 dan u_n = 96 disubstitusikan ke $S_n = \frac{1}{2}$ $n(a + u_n)$ sehingga: $Sn = \frac{1}{2}\ (15)(12 + 96) = 810$

Jadi jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah 810.

Contoh

Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika ditentukan oleh rumus S_n = $2n^2 + 5n$. Tentukan suku ke-n.

Jawab:

$U_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 5n - \{2(n - 1)^2 + 5n\} = 4n + 2$

Jadi rumus suku ke-n adalah $U_n = 4n + 2$

- **Barisan dan Deret Geometri**

a. Barisan Geometri

Alkisah di negeri Antah Berantah seorang raja akan memberikan hadiah kepada Abu, juara catur di negeri itu. Ketika raja bertanya hadiah apa yang diinginkan oleh Abu, sang juara, menjawab bahwa dia menginginkan hadiah beras yang merupakan jumlah banyak beras di petak terakhir papan catur yang diperoleh dari kelipatan beras 1 butir di petak pertama, 2 butir di petak kedua, 4 butir dipetak ketiga, dan seterusnya. Raja yang mendengar permintaan itu langsung menyetujui karena Raja berpikir bahwa hadiah yang diminta itu begitu sederhana.

Apakah memang hadiah itu begitu sederhana dan berapa butir beras sesungguhnya jumlah hadiah Abu? Jika dianalisa, hadiah yang diperoleh Abu tergantung kepada banyak petak dipapan catur.

Petak	1	2	3	4	5	…	n	…	64
Beras (butir)	1	2	4	8	16		…		…

Perhatikan bahwa barisan 1, 2, 4, 8 , 16, … mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan. Perbandingan yang tetap itu disebut rasio dan dilambangkan dengan r. Pada barisan ini perbandingan dua suku yang berurutan adalah $r = 2$. Barisan yang mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan disebut **barisan geometri**. Secara umum dapat dikatakan:

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots , u_{n-1}, u_n$ disebut barisan geometri jika $\frac{un}{un-1}$ = konstan = r

b. Rumus Suku Ke-n Barisan Geometri

Jika suku pertama $u_1 = a$ dan perbandingan dua suku yang berurutan disebut rasio r, maka

$\frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_2 = u_1 r = ar$

$\frac{u_3}{u_2} = r \Leftrightarrow u_3 = u_2 r = ar^2$

$\frac{u_4}{u_3} = r \Leftrightarrow u_4 = u_3 r = ar^3$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas diperoleh rumus umum suku ke-n barisan geometri

$$u_n = ar^{n-1}$$

dengan u_n $adalah$ suku ke-n, a adalah suku pertama, r adalah rasio

Contoh

Suku ketiga dan suku kelima suatu barisan geometri berturut-turut 27 dan 3. Jika rasio barisan ini bilangan positif, tentukan:

1) rasio dan suku pertama
2) rumus suku ke-n dan suku ke-8

Jawab

1) $\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{3}{27} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$

$$ar^2 = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{9}a = 27 \quad \Leftrightarrow a = 243$$

Jadi rasio deret itu $r = \frac{1}{3}$ dan suku pertama a = 243

2) $u_n = ar^{n-1}$

$$= 243\,(\frac{1}{3})^{n-1} = 3^5\,(3^{-1})^{\,n-1} = 3^{6-n}$$

$$u_8 = 3^{6-8} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Rumus suku ke-n adalah $u_n = 3^{6-n}$ dan suku ke-8 adalah $\frac{1}{9}$

Contoh

Tiga bilangan membentuk barisan geometri yang hasil kalinya 1000. Jika jumlah tiga bilangan itu 35, tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Jawab:

Tiga bilangan itu dimisalkan sebagai $\frac{p}{r}$, p, pr. Hasil kali tiga bilangan itu p^3 = 1000 ⇔ p = 10.

Jumlah tiga bilangan $\frac{p}{r}$ + p + pr = 35

⇔ $\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35$

⇔ $10r^2 - 25r + 10 = 0$

⇔ $2r^2 - 5r + 2 = 0$

⇔ $(2r - 1)(r - 2) = 0$

⇔ $r = \frac{1}{2}\ atau\ r = 2$

Untuk $r = \frac{1}{2}$ dan p = 10 barisan adalah 20, 10, 5

Untuk r = 2 dan p = 10 barisan adalah 5,10,20

c. Deret Geometri

Banyak orang di sekitar kita yang bekerja dalam bisnis Multi Level Marketing (MLM). Seseorang yang membangun suatu bisnis MLM mengembangkan bisnisnya dengan mencari 2 agen di bawahnya yang memasarkan produk. Masing-masing agen itu juga mencari 2 agen lagi dan seterusnya. Keuntungan yang diperoleh oleh orang pertama sangat tergantung dari kerja para agen di bawahnya untuk memasarkan produk MLM itu. Semakin banyak orang yang terlibat untuk memasarkan produk itu akan menambah banyak pendapatan dari orang pertama. Perhatikan bahwa banyak orang yang terlibat dalam bisnis itu adalah 1 + 2 + 4 + 8 + …

Jumlahkan 1 + 2 + 4 + 8 + … merupakan salah satu contoh deret geometri. Jika n suku pertama barisan geometri u_1, u_2, u_3, u_4, … , u_n dijumlahkan maka diperoleh deret geometri

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$$

Rumus umum jumlah n suku deret geometri dapat ditentukan sebagai berikut:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$$

$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$ .... (1)

Masing-masing ruas pada persamaan (1) dikalikan dengan r sehingga didapat

$rS_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ …………(2)

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2), diperoleh

$S_n - rS_n = a - ar^n$

$\Leftrightarrow Sn\ (1 - r) = a(1 - r^n)$

$\Leftrightarrow Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ atau $Sn = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$,dengan $r \neq 1$

Contoh

Tentukan jumlah 5 suku pertama deret 32 + 16 + 8 + 4+. ..

Jawab

$a = 32,\ r = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{32\left[1-(\frac{1}{2})^5\right]}{(1-\frac{1}{2})} = 62$

Jadi jumlah 5 suku pertama deret tersebut adalah 62

Contoh

Tentukan nilai n jika $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 510$

Jawab :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 510$$

$$a = 2, r = 2$$

$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

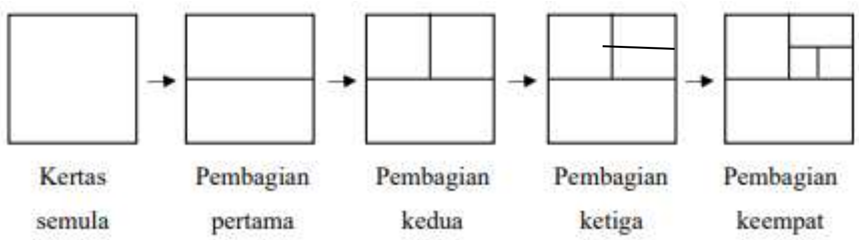
$$\Rightarrow 510 = \frac{2(2^n - 1)}{(2-1)} = 2^{n+1} - 2$$

$\Leftrightarrow 512 = 2^{n+1}$

$\Leftrightarrow n = 8$

d. Deret Geometri Tak Hingga

Untuk membahas masalah deret geometri tak hingga dapat digunakan benda yang sudah dikenal siswa. Sebuah kertas yang berbentuk persegi dibagi menjadi dua bagian. Salah satu bagian kertas itu kemudian dibagi lagi menjadi dua bagian. Selanjutnya bagian terkecil dari kertas itu dibagi lagi menjadi dua bagian dan seterusnya seperti digambarkan di bawah ini:



Secara teoritis proses pembagian ini dapat diulangi terus menerus sampai tak berhingga kali. Pada pembagian yang pertama diperoleh $\frac{1}{2}$ bagian, yang ke-2 diperoleh $\frac{1}{4}$ bagian, yang ke-3 diperoleh $\frac{1}{8}$ bagian dan seterusnya sampai tak berhingga kali. Tampak jelas bahwa jumlah dari seluruh hasil pembahian sampai tak berhingga kali adalah:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$

Proses tadi menjelaskan jumlah deret geometri tak hingga yang bisa diperagakan secara sederhana.untuk penjelasan secara teoritis perhatikan jumlah n suku pertama deret geometri $Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$. Jika suku-suku deret itu bertambah terus maka deret akan menjadi deret geometri tak hingga. Dengan demikian jumlah deret geometri tak hingga menjadi

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a(\,1-r^n)}{(1-r)}$

$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)}\ r^n$

$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)}\ r^n$

$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\ \lim\limits_{n\to\infty} r^n$

Terlihat jelas bahwa nilai S_n sangat dipengaruhi oleh nilai $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$. Jika

1) $-1 < r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ akan menjadi nol sehingga deret tak hingga itu mempunyai jumlah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah disebut konvergen atau mempunyai limit jumlah.

2) $r < -1\ atau\ r > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$ sehingga deret tak hingga itu tidak mempunyai limit jumlah. Deret yang seperti ini disebut divergen.

Contoh

Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots$

Jawab

$a = 4$ dan $r = -\frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3}$$

Jadi jumlah deret geometri tak hingga itu adalah $\frac{8}{3}$

- **Barisan sebagai Fungsi**

  Untuk menentukan suku-suku suatu barisan kita melihat keteraturan pola dari sukusuku sebelumnya. Salah satu cara untuk menentukan rumus umum suku ke-n suatu barisan adalah dengan memperhatikan selisih antara dua suku yang berurutan. Bila pada satu tingkat pengerjaan belum diperoleh selisih tetap, maka pengerjaan dilakukan pada tingkat berikutnya sampai diperoleh selisih tetap. Suatu barisan disebut berderajat satu (linear) bila selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat pengerjaan, disebut berderajat dua bila selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat pengerjaan dan seterusnya. Bentuk umum dari barisan-barisan itu merupakan fungsi dalam n sebagai berikut

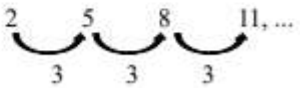
  Selisih tetap 1 tingkat $U_n = an + b$

  Selisih tetap 2 tingkat $U_n = an^2 + bn + c$

  Selisih tetap 3 tingkat $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

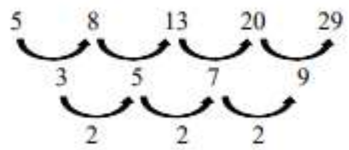
  Perlu diperhatikan bahwa a dan b pada fungsi ini tidak sama dengan a = suku pertama dan b = beda pada suku-suku barisan aritmetika yang dibicarakan sebelumnya. Untuk memahami pengertian barisan berderajat satu, berderajat dua, dan seterusnya perhatikan contoh berikut:

  1) Barisan 2, 5, 8, 11, … disebut barisan berderajat satu karena selisih tetap diperoleh pada satu tingkat penyelidikan.

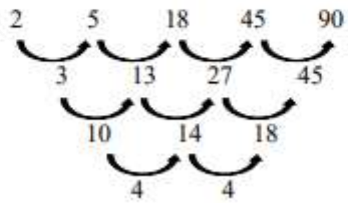
     selisih tetap = 3

2) Barisan 5, 8, 13, 20, 29, … disebut barisan berderajat dua karena selisih tetap diperoleh pada dua tingkat penyelidikan.



selisih tetap = 3

3) Barisan 2, 5, 18, 45, 90, … disebut barisan berderajat tiga karena selisih tetap diperoleh pada tiga tingkat penyelidikan.

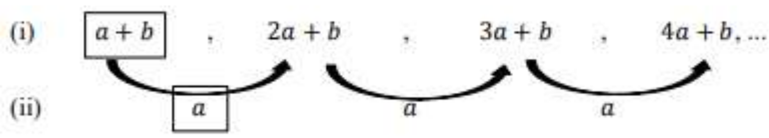


Selisih tetap = 4

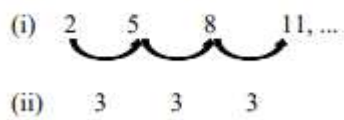
Untuk menentukan rumus suku ke-n masing-masing barisan itu dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Barisan Linear (Berderajat Satu)

Bentuk umum $U_n = an + b$, jadi $u_1 = a + b$, $u_2 = 2a + b$, $u_3 = 3a + b$, $u_4 = 4a + b$,dan seterusnya.



Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 8, 11, ... dapat ditentukan dengan cara:



Selisih tetap = 3

(ii) $a = 3 \rightarrow$ (i) $a + b = 2$

b. Barisan Berderajat Dua

Bentuk umum $Un = an^2 + bn + c$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c$, $u_2 = 4a + 2b + c$, $u_3 = 9a + 3b + c$, $u_4 = 16a + 4b + c$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(i) $\boxed{a + b + c}$, $4a + 2b + c$, $9a + 3b + c$, $16a + 4b + c, \ldots$

(ii) $\boxed{3a + b}$ $\quad 5a + b \quad 7a + b$

(iii) $\boxed{2a}$ $\quad 2a$

Rumus umum suku ke-n barisan 5, 8, 13, 20, 29, … dapat ditentukan dengan cara:

(i) 5 8 13 20 29

(ii) 3 5 7 9

(iii) 2 2 2

Selisih tetap = 2

(iii) $2a = 2$

$a = 1 \rightarrow (ii) 3a + b = 3$

$b = 0 \rightarrow (i) a + b + c = 5$

$c = 4$, sehingga $U_n = n^2 + 4$

c. Barisan Berderajat Tiga

Bentuk umum $Un = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c + d$, $u_2 = 8a + 4b + 2c + d$, $u_3 = 27a + 9b + 3c + d$, $u_4 = 64a + 16b + 4c + d$ dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut.

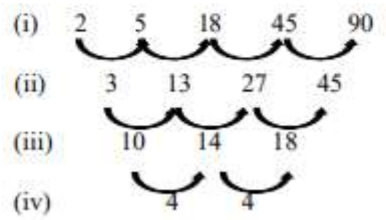
(i) $\boxed{a + b + c + d}$, $8a + 4b + 2c + d$, $27a + 9b + 3c + d$, $64a + 16b + 4c + d$

(ii) $\boxed{7a + 3b + c}$ $\quad 19a + 5b + c \quad 37a + 7b + c$

(iii) $\boxed{12a + 2b}$ $\quad 18a + 2b$

(iv) $\boxed{6a}$

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 18, 45, 90, … dapat ditentukan dengan cara:



Dengan menyelesaikan persamaan (iv), (iii), (ii) dan (i) seperti yang dilakukan pada barisan berderajat satu maupun barisan berderajat dua diperoleh

$a = \frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = -\frac{14}{3}$, dan $d = 5$

sehingga rumus suku ke-n adalah

$Un = \frac{2}{3} n^3 + n^2 - \frac{14}{3} n + 5 = \frac{1}{3} (2n^3 + 3n^2 - 14n + 15)$

- **Barisan Fibonacci**

Barisan Fibonacci adalah barisan rekursif (pemanggilan ulang/ pengulangan) yang ditemukan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Italia yang bernama Leonardo da Pisa.

Barisan ini berbentuk sebagai berikut:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946, …

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2$$

$$F_4 = F_2 + F_3 = 3$$

$$F_5 = F_3 + F_4 = 8, ...$$

Jika diperhatikan, bahwa suku ke-n merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya untuk $n \geq 2$. Jadi barisan ini didefinisikan secara rekursif sebagai berikut

$F_n = \{0, jika\ n = 0\ 1, jika\ n = 1\ F_{n-1} + F_{n-2}\ untuk\ lainnya$

Berbagai fenomena alam memiliki aturan seperti barisan Fibonacci ini. Fenomena tersebut antara lain:

1) Bunga Matahari

Gambar 4. Bunga Matahari

(Sumber: https://digiyan.com/bunga-matahari/)

Biji bunga matahari dari titik tengah (*center*) kemudian biji matahari pada lingkaran terluar terdekat selanjutnya, kemudian pada lingkaran luar selanjutnya dan samapi pada bji bunga pada lingkaran terluar bunga matahari mengikuti barisan Fibonacci.

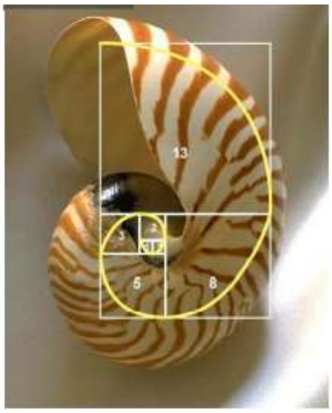
2) Mahkota Bunga

Gambar 5. Mahkota Bunga

(Sumber: https://assets.kompasiana.com/statics/files/1418367076183014337- 7.png?t=o&v=700?t=o&v=350)

Mahkota bunga pada gambar di atas memenuhi barisan Fibonacci, (a) bunga Lili putih dengan banyak mahkota bunga 1, (b) bunga Euphorbia dengan banyak mahkota bunga 2, (c) bunga Trilium dengan banyak mahkota bunga 3, (d) bunga Columbine dengan banyak mahkota bunga 5, (e) bunga Bloodroot dengan banyak mahkota bunga 8, (f) bunga Blak-eye Susan dengan banyak mahkota bunga 13, dan (g) bunga Shasta daisy dengan banyak mahkota bunga 21.

3) Cangkang Kerang



Gambar 6. Cangkang Kerang

(Sumber: https://maths.id/asal-usul-barisan-fibonacci.php)

Pola bilangan pada cangkang kerang seperti gambar di atas menunjukkan pola barisan fibonacci.

- **Golden Ratio**

  Golden ratio atau rasio emas ($\varphi = 1.618205\ldots$) merupakan suatu nilai rasio (*ratio numbe*r) konvergen yang diperoleh apabila suku-suku di atas dua belas pada barisan fibonacci dibagi dengan satu suku sebelumnya. Dalam barisan Fibonacci, F_{12} bernilai 89, F_{13} bernilai 144, F_{14} bernilai 233, dan F_{15} bernilai 377. Apabila dilakukan perhitungan dengan cara membagi suatu suku dalam deret Fibonacci dengan suku sebelumnya, maka akan diperoleh suatu bilangan yang menuju ke arah Golden Ratio atau Rasio Emas ($\varphi = 1.618$). Pehitungannya sebagai berikut.

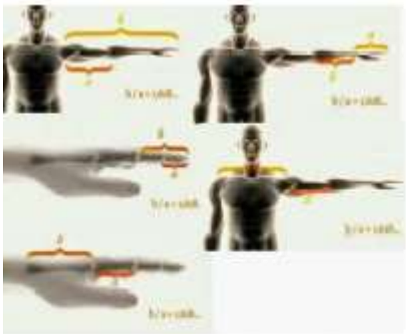
$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617977$$

$$\frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{233}{144} \approx 1{,}6180556$$

$$\frac{f_{15}}{f_{14}} = \frac{377}{233} \approx 1{,}6180258$$

dst

Adapun contoh *golden ratio* ada pada tubuh manusia yang dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 7. Goldn Ratio

(Sumber: https://www.biologiedukasi.com/2014/08/the-golden-ratio-sebuah-kesempurnaan.html)

Pada tangan manusia, diyakini bahawa perbandingan panjang antara ujung tangan ke siku dengan siku kepangkal tangan menghasilkan ratio. Begitu juga dengan rasio pembagian atas panjang pangkal telapak tangan ke siku dengan ujung telapak tangan ke pangkal telapak tangan, perbandingan antara panjang tangan manusia dengan panjang dari siku ke pangkal tangan turut menghasilkan *golden ratio.*

5. Kekongruenan dan Modulo

- **Kekongruenan**
  Definisi 2.1

  Jika m suatu bilangan bulat positif membagi $a - b$ maka dikatakan a kongruen terhadap b modulo m dan ditulis $a \equiv b \ (mod\ m)$. Jika m tidak membagi $a - b$ maka dikatakan a tidak kongruen terhadap b modulo b dan ditulis $a \not\equiv b\ (mod\ m)$. Jika $m > 0$ dan $m|(a - b)$ maka ada suatu bilangan bulat k sehingga $a - b = mk$. Dengan demikian $a \equiv b\ (mod\ m)$ dapat dinyatakan sebagai $a - b = mk$, ataubeda diantara a dan b merupakan kelipatan m. Atau $a = b + mk$, yaitu a sama dengan b ditambah kelipatan m.

Contoh 2.1

1) $10 \equiv 5\ (mod\ 5)$

   Jelas menurut definisi 10 − 5 = 5.1, sehingga 10 kongruen terhadap 5 modulo 5.

2) $8 \not\equiv 3\ (mod\ 2)$ Menurut definisi 8 − 3 ≠ 2. k, sehingga 8 tidak kongruen dengan 3 modulo 2

Teorema 2.1

Untuk bilangan bulat sebarang a dan b, $a \equiv b\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m.

Teorema 2.2

Kekongruenan sebagai relasi ekivalen. Untuk m bilangan bulat positif dan p, q, dan r bilangan bulat, berlaku

1) Sifat Refleksif $p \equiv p\ (mod\ m)$
2) Sifat Simetris $p \equiv q\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $q \equiv p\ (mod\ m)$
3) Sifat Transitif Jika $p \equiv q\ (mod\ m)$ dan $q \equiv r\ (mod\ m)$ maka $p \equiv r\ (mod\ m)$

Contoh 2.2

1) $5 \equiv 5(mod\ 7)$ dan $-10 \equiv -10(mod\ 15)$ sebab $7 \mid 5 - 5\ dan\ 15 \mid -10 - (-10)$
2) $27 \equiv 6(mod\ 7)$ akibatnya $6 \equiv 27(mod\ 7)$ sebab $7 \mid 6 - 27$ atau $7 \mid (-21)$
3) $45 \equiv 21(mod\ 3)$ dan $21 \equiv 9(mod\ 3)$, maka $45 \equiv 9(mod\ 3)$ sebab $3 \mid 45 - 9\ atau\ 3 \mid 36$

Teorema 2.3

Jika p, q, r, dan m adalah bilangan-bilangan bulat dan $m > 0$ sedemikian hingga $p \equiv q(mod\ m)$, maka:

1) $p + r \equiv q + r(mod\ m)$
2) $p - r \equiv q - r(mod\ m)$
3) $pr \equiv qr(mod\ m)$

Contoh 2.3

1) $43 \mid 7 (mod\ 6)$, maka $43 + 5 \mid 7 + 5 (mod\ 6)$ atau $48 \mid 12 (mod\ 6)$
2) $27 \mid 6 (mod\ 7)$, maka $27 - 4 \mid 6 - 4 (mod\ 7)$ atau $23 \mid 2 (mod\ 7)$
3) $35 \mid 3 (mod\ 8)$, maka $35.4 \mid 3.4 (mod\ 8)$ atau $140 \mid 12 (mod\ 8)$

Contoh 2.4

Perhatikan bahwa teorema 2.3(3) tidak bisa dibalik, artinya jika $pr \equiv qr (mod\ m)$, maka belum tentu bahwa $p \equiv q (mod\ m)$, misalnya $24 = 4.6$, $12 = 4.3,$ dan $24 \equiv 12 (mod\ 6)$ atau $4.6 \equiv 4.3 (mod\ 6)$, tetapi $6 \equiv 3 (mod\ 6)$.

Teorema 2.4

Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$ maka

1) $a + c \equiv b + d\ (mod\ m)$
2) $a - c \equiv b - d\ (mod\ m)$
3) $ac \equiv bd\ (mod\ m)$

Contoh 2.5

1) $36 \equiv 8 (mod\ 7)$ dan $53 \equiv 4 (mod\ 7)$, maka $36 + 53 \equiv 8 + 4 (mod\ 7)$ atau $89 \equiv 12 (mod\ 7)$
2) $72 \equiv 7 (mod\ 5)$ dan $43 \equiv 3 (mod\ 5)$, maka $72 - 43 \equiv 7 - 3 (mod\ 5)$ atau $29 \equiv 4 (mod\ 5)$
3) $15 \equiv 3 (mod\ 4)$ dan $23 \equiv 7 (mod\ 4)$ maka $15.23 \equiv 3.7 (mod\ 4)$ atau $345 \equiv 21 (mod\ 4)$

Teorema 2.5

Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$ maka $ax + cy \equiv bx + dy\ (mod\ m)$

Teorema 2.6

Jika $p \equiv pq (mod\ m)$ maka $pr \equiv qr\ (mod\ mr)$.

Teorema 2.7

Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ maka $a^n \equiv b^n\ (mod\ m)$ untuk n bilangan bulat positif.

Teorema 2.8

Misalkan f suatu polinom dengan koefisien bilangan bulat, yaitu $f(x) = d_0\, x^n + d_1\, x^{n-1} + \ d_2\, x^{n-2} + \cdots. + d_{n-1}\, x + dn$ Dengan d_0, d_1, … , dn masing-masing bilangan bulat. Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ maka $f(a) \equiv f(b)(mod\ m)$.

Teorema 2.9

Jika a suatu solusi $f(x)\ \equiv\ 0(mod\ m)$ dan $a\ \equiv\ b\ (mod\ m)$ maka b juga solusi $f(x)$ itu.

Contoh 2.6

Pandang $b\ =\ a_m\, 10^m +\ a_{m-1}\, 10^{m-1} + \cdots. + a_1\, 10 + a_n$ sebagai perluasan desimal bilangan bulat positif b dengan ak bilangan bulat dengan $0\ \leq\ ak\ <\ 10, k\ =\ 0,1,2, \ldots\ , m\ -\ 1, m.$

Misalkan $a_m\ +\ a_{m-1}\ +\ \cdots\ +\ a_1\ +\ a_0\ =\ s$. Maka 3|$b$ jika dan hanya jika 3|s. Perhatikan bahwa 10 ≡ 1 (mod 3). Maka menurut Teorema 8, $f(10)\ \equiv\ f(1)(mod\ 3)$.

Jika $b\ =\ f(10), maka\ \ a_m\, 10^m +\ a_{m-1}\, 10^{m-1} + \cdots. + a_1\, 10 + a_0 \equiv\ a_m\, 10^m + a_{m-1}\, 10^{m-1} + \cdots. + a_1\, 10 + a_n(mod\ 3)$ atau $f(10)\ \equiv\ f(1)(mod\ 3)$

Tetapi $a_m\ +\ a_{m-1}\ + \cdots. + a_1\ + a_0\ =\ s, sehingga\ b\ \equiv\ s(mod\ 3), atau\ b\ -\ s\ =\ 3h, h$ bilangan bulat.

Jika $3|b$ atau $b\ =\ 3r$, maka $3r\ -\ s\ =\ 3h, 3(r\ -\ h)\ =\ s$ atau $3|s$. Sebaliknya jika $3|s$ atau $s\ =\ 3u$ maka $b\ -\ 3u\ =\ 3h$ atau $b\ =\ 3(h\ -\ u)$ atau $3|b$. Maka $3|b$ jika dan hanya jika $3|s$. Dengan ungkapan lain, suatu bilangan bulat positif b akan terbagi 3 jika dan hanya jika haisl penjumlahan semua angka-angka bilangan itu terbagi 3. Sebagai misal 112764531 habis dibagi 3 karena $1\ +\ 1\ +\ 2\ +\ 7\ +\ 6\ +\ 4\ +\ 5\ +\ 3\ +\ 1\ =\ 30$ habis dibagi 3. Bilangan 112764532 dapat ditunjukkan tidak terbagi tiga karena memberikan sisa $r, 0\ \leq\ r\ <\ 3$. Dua buah bilangan bulat a dan b yang kongruen modulo m mungkin dapat juga kongruen modulo suatu bilangan bulat lain. Misalkan $d > 0$ dan d pembagi $m\ dan\ a\ \equiv\ b\ (mod\ m)$. Maka $m\ =\ kd$ dan $a\ -\ b\ =\ pm$ sehingga $a\ -\ b\ =\ p(kd)\ =\ (pk)d$ atau d pembagi $a - b$.

Teorema 2.10

Jika $d|m$ dan $a \equiv b(mod\ m)$ maka $a \equiv b\ (mod\ d)$

Teorema 2.11

Misalkan $(a, m) = d\ ax = ay\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $x \equiv y\ (mod\ \frac{m}{d}\ )$

Teorema 2.12

Misalkan $(a, m) = 1$.

$ax \equiv ay\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $x \equiv y\ (mod\ m)$

Teorema 2.13

Jika $ax \equiv ay\ (mod\ p)$ dengan $p \nmid a$ dan p bilangan basit, maka $x \equiv y\ (mod\ p)$

Teorema 2.14

Diketahui bilangan-bilangan bulat a, p, q, m, dan m > 0.

1) $ap \equiv aq(mod\ m)$ jika dan hanya jika $p \equiv q\ (mod\ \frac{m}{a,m}\ )$
2) $p \equiv q(mod\ m1)$ dan $p \equiv q(mod\ m2)$ jika dan hanya jika $p \equiv q(mod[m1, m2\ ])$

Contoh 2.7

1) $8p \equiv 8q(mod\ 6)$ dan $(8,6) = 2$, maka $p \equiv q(mod \frac{6}{2})$ atau $p \equiv q(mod\ 3)$
2) $12p \equiv 12q(mod\ 16)$ dan $(12,16) = 4$, maka $p \equiv q(mod \frac{16}{4}\ )$ atau $p \equiv q(mod\ 4)$

Contoh 2.8

1) $p \equiv q(mod\ 6) dan\ p \equiv q(mod\ 8), maka\ p \equiv q(mod\ [6,8]) atau$
   $p \equiv q(mod\ 24)$
2) $p \equiv q(mod\ 16) dan\ p \equiv q(mod\ 24), maka\ p \equiv q(mod\ [16,24]) atau$
   $p \equiv q(mod\ 48)$

- **Sistem Residu**

  Definisi 2.2

  Suatu himpunan $\{x, x, \dots, x\}$ disebut suatu sistem residu lengkap modulo m. Jika dan hanya jika untuk setiap y dengan $0 \leq y < m$, ada satu dan hanya satu x dengan $1 \leq i < m$, sedemikian hingga $y \equiv x(mod\ m)\ atau\ x \equiv y(mod\ m)$.

Contoh 2.9

1) Himpunan $A = \{6, 7, 8, 9\}$ bukan merupakan sistem residu lengkap modulo 5 sebab banyaknya unsur A kurang dari 5.
2) Himpunan $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 5 sebab untuk setiap y dengan dengan $0 \leq y < 5$, ada satu dan hanya satu x dengan $1 \leq i < 5$ sedemikian hingga $y \equiv x(mod\ 5)\ atau\ x \equiv y(mod\ 5)$.

   Nilai-nilai y yang memenuhi $0 \leq y < 5$, adalah $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3, y = 4, atau\ y = 5$. Jika kita selidiki, maka kita peroleh bahwa:

   $10 \equiv 0(mod\ 5)$ $8 \equiv 3(mod\ m)$ $6 \equiv 1(mod\ m)$
   $9 \equiv 4(mod\ 5)$ $7 \equiv 2(mod\ m)$

   Dengan demikian untuk setiap y dengan $y = 0, 2, 3, 4, 5$, ada satu dan hanya satu x dengan $x = 6, 7, 8, 9, 10$, sedemikian hingga $x \equiv y(mod\ m)$. Jadi A adalah suatu sistem residu lengkap modulo 5.
3) Himpunan $B = \{4, 25, 82, 107\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 4 sebab untuk setiap y dengan $0 \leq y < 4$, ada satu dan hanya satu x dengan $1 \leq i < 4$ sedemikian hingga
   $y \equiv x(mod\ 4)$ atau $x \equiv y(mod\ 4)$.
   4 ≡ 0$(mod\ 4)$ $82 \equiv 2(mod\ 4)$
   $25 \equiv 1(mod\ 4)$ $107 \equiv 3(mod\ 4)$
4) Himpunan $C = \{-33, -13, 14, 59, 32, 48, 12\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 7 sebab untuk setiap y dengan $0 \leq y < 3$, ada lebih dari satu x dengan dengan $1 \leq i < 7$ sedemikian hingga $ay \equiv x(mod\ 7)$ atau $x \equiv y(mod\ 7)$.
   $-33 \equiv 0(mod\ 7)$ $59 \equiv 3(mod\ 7)$ $48 \equiv 1(mod\ 7)$
   $-13 \equiv 0(mod\ 7)$, $32 \equiv 3(mod\ 7)$ $12 \equiv 1(mod\ 7)$
   $14 \equiv 0(mod\ 7)$
5) Himpunan $D = \{10, -5, 27\}$ adalah bukan suatu sistem residu lengkap modulo 3 sebab untuk suatu y = 1 dengan $0 \leq y < 3$, ada lebih dari satu x (yaitu 10 dan −5) sehingga $10 \equiv 1(mod\ 3)\ -5 \equiv 1(mod\ 3)$

6) Algoritma pembagian menunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat $0,1, \ldots, m-1$ merupakan suatu sistem residu lengkap modulo m, dan disebut sebagai residu non-negatif terkecil modulo m.

Definisi 2.3

Suatu himpunan bilangan bulat $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ disebut suatu sistem residu tereduksi modulo m jika dan hanya jika:

i. $(xi, m) = 1, 1 \leq i < k$

ii. $xi \equiv xj (mod\ m)$ untuk setiap $i \neq j$

iii. Jika (y, m) = 1, maka $y \equiv xi (mod\ m)$ untuk suatu $i = 1, 2, \ldots, k$

Contoh 2.10

1) Himpunan {1,5} adalah suatu sistem residu tereduksi modulo 6 sebab:
   a) $(1,6) = 1\ dan\ (5,6) = 1$
   b) $5 \equiv 1 (mod\ 6)$
2) Himpunan {17, 91} adalah suatu sistem residu tereduksi modulo 6 sebab:
   a) $(17,6) = 1\ dan\ (91, 1, 6) = 1$
   b) $91 \equiv 17 (mod\ 6)$

Contoh 2.11

1) Himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 8. Unsur-unsur A yang tidak relatif prima dengan 8 adalah 0, 2, 4, dan 6 karena $(0,8) = 8 \neq 1, (2,8) = 2 \neq 1, (4,8) = 4 \neq 1, dan\ (6,8) = 2 \neq 1$. Misalkan B adalah himpunan dari unsur-unsur yang tertinggal, maka $B = \{1, 3, 5, 7\}$, dan B merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 8 karena memenuhi definisi 2.2 2.
2) Himpunan A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19} adalah suatu sistem residu lengkap modulo 20. Jika unsur-unsur A yang tidak relatif prima dengan 20 dibuang, yaitu 0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, dan 18, maka unsur-unsur yang tertinggal adalah 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, dan 19, dan

B = {1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19} merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 20

Definisi 2.4

Ditentukan m adalah suatu bilangan bulat positif. Banyaknya residu di dalam suatu sistem residu tereduksi modulo m disebut fungsi ϕ-Euler dari m, dan dinyatakan dengan $\phi(m)$.

Contoh 2.12

$\phi(2) = 1$, diperoleh dari unsur 1

$\phi(3) = 2$, diperoleh dari unsur-unsur 1 dan 2

$\phi(4) = 2$, diperoleh dari unsur-unsur 1 dan 3

$\phi(5) = 4$, diperoleh dari unsur-unsur 1, 2, 3, dan 4

$\phi(16) = 8$, diperoleh dari unsur-unsur 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, dan 15

$\phi(27) = 18$, diperoleh dari unsur-unsur 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, dan 26

$\phi(p) = p - 1$ jika p adalah suatu bilangan prima

Teorema 2.15

Ditentukan (a, m) = 1

Jika $\{x1, x2, \dots, xk\}$ adalah suatu sistem residu modulo m yang lengkap atau tereduksi, maka $\{ax1, ax2, \dots, axk\}$ juga merupakan suatu sistem residu modulo m yang lengkap atau tereduksi.

Contoh 2.13

1. Himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah merupakan suatu sistem residu lengkap modulo 6. Jika masing-masing unsur A dikalikan dengan 5, yang mana (5,6) = 1, dan setelah dikalikan dimasukkan sebagai unsur himpunan B, maka dapat ditentukan bahwa B = {0, 5, 10, 15, 20, 25}. Himpunan B merupakan suatu sistem residu yang lengkap modulo 6 sebab setiap unsur B kongruen dengan satu dan hanya satu $y \in$ {0, 1, 2, 3, 4, 5}, yaitu:
   $0 \equiv 0 (mod\ 6)$ $\quad$ $10 \equiv 4 (mod\ 6)$ $\quad$ $20 \equiv 2 (mod\ 6)$
   $5 \equiv 5 (mod\ 6)$ $\quad$ $15 \equiv 3 (mod\ 6)$ $\quad$ $25 \equiv 1 (mod\ 6)$
2. Himpunan A = {1, 5, 7, 11} adalah merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 12. Jika masing-masing unsur A

dikalikan dengan 17 dengan (17,12) = 1, dan setelah dikalikan dimasukkan sebagai unsur himpunan B, maka dapat ditentukan bahwa B = {17, 85, 119, 187}. Himpunan B merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 12 sebab setiap unsur B relatif prima dengan 12, dan tidak ada sepasang unsur B yang kongruen, yaitu

$(17,12) = (85,12) = (119,12) = (187,12) = 1$

$17 \equiv 85(mod\ 12)$ $17 \equiv 119(mod\ 12)$ $17 \equiv 187(mod\ 12)$

$85 \equiv 119(mod\ 12)$ $85 \equiv 187(mod\ 12)$ $119 \equiv 187(mod\ 12)$

Teorema 2.16 Teorema Euler

Jika a, m ∈ Z dan m > 0 sehingga (a, m) = 1, maka

$a^{\phi(m)} \equiv 1(mod\ m)$

Contoh 2.14

Carilah dua digit terakhir lambang bilangan desimal dari 23^{500}.

Soal ini dapat dijawab dengan menyatakan maknanya dalam bentuk lain, yaitu sama dengan mencari x jika $23^{500} \equiv x(mod\ 100)$. Kemudian bentuk $23^{500} \equiv x(mod\ 100)$ dapat dipecah menjadi $23^{500} \equiv x(mod\ 4)$ dan $23^{500} \equiv x(mod\ 25)$.

1) mencari x dari $23^{500} \equiv x\ (mod\ 4)$.

   $2^3 \equiv 3(mod\ 4)$, maka $23^2 \equiv 9(mod\ 4) \equiv 1(mod\ 4)$,

   sehingga $23^{500} = (23^2)^{250}$

   Dengan demikian $23^{500} = (23^2)^{250} \equiv 1^{250}(mod\ 4)$, atau

   $$x \equiv 1(mod\ 4)$$

2) mencari x dari $23^{500} \equiv x\ (mod\ 25)$

   $23 \equiv -2(mod\ 25)$, maka $23^2 \equiv 4(mod\ 25)$, $23^4 \equiv 16(mod\ 25)$,

   $23^8 \equiv 6(mod\ 25), 23^{16} \equiv 11(mod\ 25), 23^{32} \equiv -4(mod\ 25)$

   $23^{64} \equiv 16(mod\ 25), 23^{128} \equiv 6(mod\ 25)$, dan

   $23^{256} \equiv 11(mod\ 25)$

Dengan demikian

$23^{500} = 23^{256} \;.23^{128} \;.23^{64} \;.23^{32} \;.23^{16} \;.23^{4}$

$\equiv 11.6.16.(-4).11.16(mod\ 25)$

$\equiv (-4).6.(-4).6(mod\ 25)$

$\equiv 576(mod\ 25)$

$\equiv 1(mod\ 25)$, yaitu $x \equiv 1(mod\ 25)$

Dari hasil 1) dan 2), yaitu $x \equiv 1(mod\ 4)$ dan $x \equiv 1(mod\ 25)$, maka berdasarkan pada Teorema 2.14(b), x ≡ 1(mod [4,25])x ≡ 1(mod 100)

jadi $23^{500} \equiv 1(mod\ 100)$, berarti dua digit terakhir lambang bilangan desimal dari 23^{500} adalah 01.

Contoh 2.15

Tunjukkan jika (n, 7) = 1, n ∈ N, maka 7 | $n^7 - n$

Jawab:

Karena (n, 7) = 1, maka menurut Teorema Euler, $n^{\phi(7} \equiv 1(mod\ 7)$. Selanjutnya ϕ(7) = 6, sehingga diperoleh $n^{\,6} \equiv 1(mod\ 6), d$an sesuai Definisi 3.1, 7 | $n^6 - 1,$ dan akibatnya 7 | $n(n^6 - 1)\ atau$ 7 | $n^7 - 1$

Contoh 2.16

Jika bulan ini adalah bulan Mei, maka 239^{43} bulan lagi adalah bulan

Jawab:

Permasalahan ini dapat diganti dengan mencari x jika $239^{43} \equiv x(mod\ 12)$. Karena (239,12) = 1, maka menurut Teorema Euler, $239^{\phi(12)} \equiv 1(mod\ 12)$.

Selanjutnya ϕ(12) = 4, sehingga diperoleh $239^4 \equiv 1(mod\ 12)$.

$239^{43} = (239^4)^{10.239^3}$

$\equiv 1.239^3\ (mod\ 12)$

$\equiv (-1)(-1)(-1)(mod\ 12)$

$\equiv 11(mod\ 12)$

Jadi x = 11, dengan demikian 239^{43} bulan lagi adalah bulan April.

Contoh 2.17

Kongruensi linier ax ≡ $b(mod\ \ m)$ dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Euler sebagai berikut:

$ax \equiv b(mod\ m)$

$a^{\phi(m)-1}.ax \equiv a^{\phi(m)-1}.b(mod\ m)$

$x \equiv a^{\phi(m)-1}\ b(mod\ m)$

Penyelesian

$7x \equiv 3(mod\ 12)$ adalah x

$\equiv 7^{\phi(12)-1}.3(mod\ 12)$

$\equiv 7^4 - 1\ .3(mod\ 12)$

$\equiv 7^3\ .3(mod\ 12)$

$\equiv 21(mod\ 12)$

$\equiv 9(mod\ 12)$

Teorema 2.17 Teorema Kecil Fermat

Jika p adalah suatu bilangan prima dan p tidak membagi a, maka $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$

Contoh 2.18

Carilah suatu x jika $2^{250} \equiv x(mod\ 7)$ dan $0 \leq x < 7$

Jawab:

Karena 7 adalah bilangan prima, (2,7) = 1, dan $\phi(7) = 7 - 1 = 6$, maka:

$2^{\phi(7)} \equiv 1(mod\ 7)$

$2^6 \equiv 1(mod\ 7)$

$2^{250} = (2^6)^{41}\ .2^4 \equiv 1.2\ 4\ (mod\ 7) \equiv 16(mod\ 7) \equiv 2(mod\ 7)$

Jadi: $x = 2$

Contoh 2.19

Carilah satu digit terakhir lambang bilangan basis 10 dari:

1) 2^{500}
2) 7^{175}

Jawab:

Untuk mencari digit terakhir dari lambang bilangan basis 10, permasalahan dapat dipandang sebagai mencari x jika $y \equiv x(mod\ 10)$. Karena 2.5 = 10 dan (2,5) = 1, maka $y \equiv x(mod\ 10)$ dapat dinyatakan sebagai $y \equiv x(mod\ 2)$ dan $y \equiv x(mod\ 5)$.

1) $2 \equiv 0(mod\ 2)$, maka $2^{500} \equiv 0, 2, 4, 6, 8, \ldots (mod\ 2)$

$\phi(5) = 4\ dan\ (2{,}5) = 1$, maka $2^4 \equiv 1(mod\ 5)$, sehingga $2^{500} = (2^4)^{125} \ .1(mod\ 5) \equiv 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\ (mod\ 5)$

Dengan demikian $2^{500} \equiv 6(mod\ 2)$dan $2^{500} \equiv 6(mod\ 5)$, berarti $2^{500} \equiv 6(mod\ 10)$. Satu digit terakhir lambang bilangan basis 10 dari 2^{500} adalah 6.

2) $7 \equiv 1(mod\ 2)$, maka $7^{175} \equiv 1, 3, 5, \ldots\ (mod\ 2)$

$\phi(5) = 4\ dan\ (7{,}5) = 1$, maka 7 4 $\equiv 1(mod\ 5)$, sehingga $7^{175} = (7^4)^{43} \ .7^3 \equiv 73(mod\ 5) \equiv 2.2.2(mod\ 5) \equiv 8(mod\ 5) \equiv 3(mod\ 5) \equiv 3, 8, 13, 18, \ldots\ (mod\ 5)$.

Dengan demikian $7^{175} \equiv 3(mod\ 2)$ dan $7^{175} \equiv 3(mod\ 5)$, berarti $7^{175} \equiv 3(mod\ 10)$. Satu digit terakhir lambing bilangan basis 10 dari 7175 adalah 3.

Teorema 2.18

Jika (a, m) = 1, maka hubungan $ax \equiv b(mod\ m)$ mempunyai selesaian $x = a^{\phi(m)-1} \ .b + tm$

Teorema 2.19 Teorema Wilson

Jika p adalah suatu bilangan prima, maka $(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$

Contoh 3.20

1) (7– 1)! = 6! = 1.2.3.4.5.6 = 1. (2.4). (3.5). 6 = 1.8.15.6 ≡ $1.1.1.6(mod\ 7) \equiv -1(mod\ 7)$

2) (13– 1)! = 12! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12
= 1. (2.7). (3.9). (4.10). (5.8). (6.11). 12 = 1.14.27.40.40.66.12
≡ 1.1.1.1.1.1.12(mod 13) ≡ – 1(mod 13)

Teorema 2.20

Jika n adalah suatu bilangan bulat positif sehingga $(n-1)! \equiv -1(mod\ n)$, maka n adalah suatu bilangan prima.

Contoh 3.21

(15– 1)! = 14! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14
= 1.2. (15).4.6.7.8.9.10.11.12.13.14 ≡ $0(mod\ 15)$
(15– 1)! = 14! tidak kongruen dengan – 1(mod 15), maka 15 bukan suatu bilangan prima.

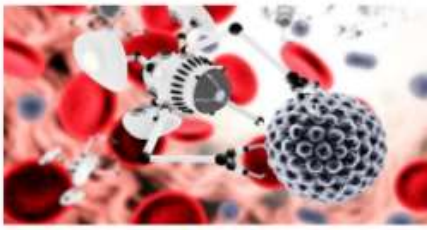
6. Logaritma

- **Fungsi Logaritma**

Logaritma secara dasar merupakan operasi matematika yang merupakan kebalikan dari Eksponen. Artinya, untuk mencari nilai dari suatu bilangan logaritma harus membalikkan fungsi dari eksponensial. Logaritma merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan mengenai fungsi yang memiliki pangkat banyak, bahkan bisa dilakukan untuk fungsi yang memiliki pangkat yang tidak diketahui (n). Logaritma dapat memudahkan dalam mencari turunan (integral) dari suatu kasus.

Kegunaan logaritma dalam kehidupan sehari - hari secara langsung memang sulit ditemukan sebagaimana juga eksponen. Namun demikian, manfaat logaritma ini dalam kehidupan secara tidak langsung. Artinya, logaritma terlalu rumit untuk diterapkan dalam kehidupan sehari - hari. Logaritma dipakai oleh para peneliti dan saintis untuk menyederhanakan suatu model matematis dari suatu fenomena yang diamati dalam penelitian. Hasil penemuan dari peneliti dan saintis ini berpengaruh dalam kehidupan kita.

Misalkan penemuan komputer dan smartphone banyak menggunakan konsep logaritma dalam pembuatan program mereka.



Gambar 8. Ilustrasi pertumbuhan Tekhnologi Nano

Sumber : http://www.monsterrarnet.com

Sebelum ditemukannya logaritma, banyak persoalan dalam sains yang sulit untuk dipecahkan, terutama bagi astronom dalam mengukur jarak antar bumi dengan bulan atau jarak antara satu bintang dengan bintang yang lainnya. Penggunaan logaritma telah memudahkan astronom dalam mengalikan dan menghitung jarak antara satu objek dengan objek lain yang mempunyai jarak yang sangat jauh, bahkan hingga memunculkan fungsi logaritma.

Gambar 9. Ilustrasi Perhitungan Astronom

Sumber : http://www.monsterrarnet.com

Demikian juga pada ilmu biologi logaritma banyak digunakan. Contoh dalam menghitung pertumbuhan, suatu tumbuhan membutuhkan waktu yang sangat lama. Adanya pemodelan-pemodelan matematis seperti halnya fungsi logaritma memudahkan para saintis biologi atau kimia melakukan perhitungan dalam persoalan pertumbuhan tumbuhan atau zat. Beberapa kegunaan logaritma dalam kehidupan sehari – hari menunjukkan bahwa logaritma sesungguhnya ke depan akan semakin dekat dengan dengan kehidupan manusia. Hal ini melihat kecenderungan konsep dari logaritma banyak digunakan dalam teknologi-teknologi tingkat tinggi.

- **Fungsi Logaritma dan Grafiknya**

Dari fungsi $f : x \quad a^x$ yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan real positif. Fungsi tersebut bijektif dari R ke R+ sehingga mempunyai invers f^{-1} $: R+ \quad R$ Yaitu setiap x R mempunyai peta tunggal y R+ dan sebaliknya y R+ mempunyai peta tunggal x R . Jadi fungsi $f : x \quad ax$ mempunyai invers f^{-1} sehingga dari $y = a^x$ ™ ${}^a log\ log\ y = x$ diperoleh : $f^{-1}\ (x) =$ ${}^a log\ log\ x$ dan $f^{-1}\ (y)$ = ${}^a log\ log\ y$.

Fungsi invers ini disebut fungsi logaritma yang mempunyai domain himpunan bilangan positif R+ dan range himpunan bilangan real R

Berarti fungsi $f^{-1} : x \quad {}^{a}log\ log\ x$ adalah fungsi invers dari fungsi f : $x \ a^{x}$. Fungsi – fungsi tersebut grafiknya simetris terhadap garis y = x sehingga setiap titik (q,p) pada grafik y = ${}^{a}log\ log\ x$ merupakan peta titik (p,q) pada grafik $y = a^{x}$ Dalam logaritma x a log diisyaratkan a > 0 d dan a ¯1, serta x > 0

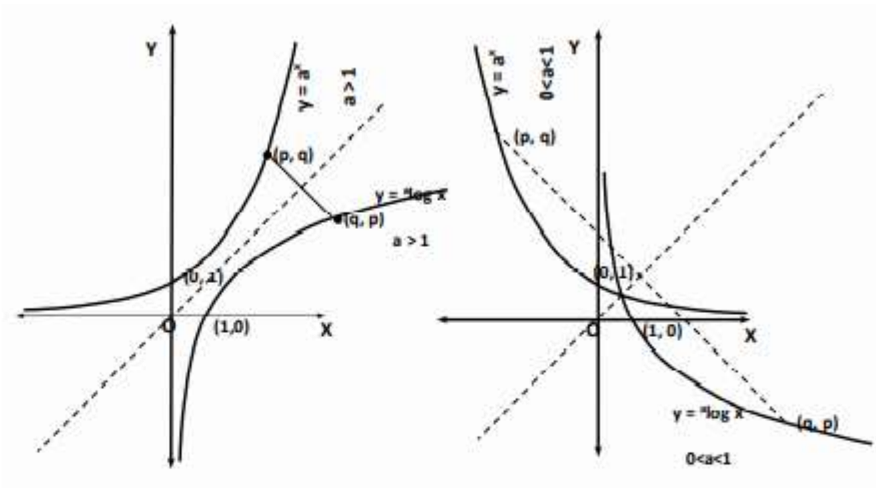
Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen. Fugsi logaritma dapat dicari nilai fungsinya untuk domain $0 \ x$.

Dengan demikian secara umum bentuk umum fungsi logaritma adalah: $f\ x\ x\ a$: ${}^{a}log\ log\ x$ atau $f(x) = {}^{a}log\ log\ x$ dengan $a > 0, a \ 1, x > 0$ dan xR Dari bentuk umum di atas dapat diambil pengertian sebaga berikut:

1. Daerah asal (domain) dari fungsi logaritma adalah $Df : x\ x \ 0, x \ R$.
2. a disebut bilangan pokok (basis) logaritma dengan syarat $a \ 0$ dan $a \ 1$ dengan demikian berlaku $0 \ a\ 1$ dan $a\ 1$.
3. Daerah hasil (range) dari fungsi logaritma adalah $Rf : y \quad y\ , y \ R$

Grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^{a}log\ log\ x$ selalu memotong sumbu X di titik (1,0) dan tidak pernah memotong sumbu Y. Apabila $0 \ a\ 1$ maka grafiknya turun, sedangkan apabila $a\ 1$ maka grafiknya naik.

Berdasar kenyataan bahwa fungsi eksponen dan fungsi logaritma yang pokok eksponen dan pokok logaritmanya sama adalah fungsi yang saling invers, maka grafik kedua fungsi tersebut saling simetris terhadap grafik fungsi identitas, yaitu $f(x) = x$ yang persamaannya $y = x$. Karena itu maka setiap titik (q, p) pada grafik y = ${}^{a}log\ log\ x$ merupakan peta titik (p, q) pada grafik $y = a^{x}$. Hal ini dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut.



$V1.$

Diketahui $V_1 = 0{,}01$; $V_2 = 0{,}5$ dan log 5 = 0,6989.

Tentukan besarnya kerja motor tersebut!

Jawab:

$\omega \ = \ ln\, V_2 - lnV_1 \ = ln\, ln\, \frac{V_2}{V_1} \ = \ ln\, 50 \ = \ 2{,}303\ log\, 50$

$= \ 2{,}303\ (log\, 5 \ + \ log\, 10) \ = \ 2{,}303.$

$1{,}6989 = \ 3{,}9126$

Jadi besarnya kerja motor adalah 3,9126 joule

- **Sifat-sifat logaritma sebagai berikut:**

(1) log (a × b) = ^{g}log a + ^{g}log b

(2) $^g\log \left(\frac{a}{b}\right)$ = ^{g}log a – ^{g}log b

(3) ^{g}log a^n = n × ^{g}log a

(4) ^{g}log a = $\frac{^p\log a}{^p\log g}$

(5) ^{g}log a = $\frac{1}{^a\log g}$

(6) ^{g}log a × ^{a}log b = ^{g}log b

(7) $^{g^n}\log a^m$ = $\frac{m}{n}$ ^{g}log a

(8) $g^{\,^g\log a} = a$

- **Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma**

  Persamaan logaritma adalah suatu persamaan yang memuat variabel dalam pokok logaritma atau dalam numerisnya (anti logaritma).

  Ada beberapa bentuk persamaan logaritma diantaranya:

  1) Persamaan logaritma berbentuk :
     a) ${}^{a}log\ log\ f(x) = {}^{a}log\ log\ p$
     b) ${}^{a}log\ log\ f(x)\ = {}^{a}log\ log\ g(x)$ dengan f(x) dan g(x) bukan fungsi konstan
  2) Persamaan logaritma dalam bentuk persamaan kuadrat Hal ini sering dijumpai bentuk ${}^{a}(x)$, yang artinya $({}^{a}log\ log\ f(x)\ )^{n}$

     Dalam persamaan logaritma perlu disyaratkan bahwa bilangan pokok dan yang dilogaritmakan harus positif dan bilangan pokok tidak sama dengan satu.

     Contoh:

     Tentukan himpunan penyelesaiaan dari : $log\ (\ x - 2\ )\ +\ log\ (\ x - 7\ )\ =\ log\ 6$

     Jawab: Syarat $x - 2\ >\ 0$ dan $x - 7\ >\ 0$. Jadi syaratnya $x\ >\ 7$

     Maka $log\ (\ x - 2\ )\ +\ log\ (\ x - \ 7\ )\ =\ log\ 6\ log\ (\ x^2\ - 9x\ + 14\ )\ =\ log\ 6$

     $x^2\ - 9x\ +\ 14\ =\ 6$

     $x^2\ - 9x\ +\ 14\ =\ 6$

     $x^2\ - 9x\ +\ 8\ =\ 0$

     $(x - 1\ )(\ x - 8)\ =\ 0$

     $x\ =\ 1\ atau\ x\ = 8$

     Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { 8 }

  Dari fungsi $f{:}x\ \ {}^{a}log\ log\ f(x)$ yang merupakan fungsi naik bila $a\ \ 1$ dan $x\ \ R^{+}$, sedangkan fungsi turun bila $0\ \ a\ \ 1$, berlakulah :

  a) Untuk $a\ \ 1$ sehingga: ${}^{a}log\ log\ \ x\ \ \ {}^{a}log\ log\ \ y\ \ \ x\ \ y$
     ${}^{a}log\ log\ \ x\ \ < {}^{a}log\ log\ \ y\ \ \ x < \ y$
  b) Untuk $0\ \ a\ \ 1$ sehingga: ${}^{a}log\ log\ \ x\ \ \ {}^{a}log\ log\ \ y\ \ \ x < \ y$
     ${}^{a}log\ log\ \ x\ \ < {}^{a}log\ log\ \ y\ \ \ x\ \ y$

     Contoh :

     Tentukan himpunan penyelesaian dari :

$^{7}log\ log\ (x-1) > 3-2\ \ .\ ^{x+1}\log 7$

Jawab : Misalkan $^{7}log\ log\ (x-1) = p$ maka $^{x-1}log\ log\ 7\ = \frac{1}{p}$

Pertidaksamaan menjadi :

$p\ \ 3-2.\frac{1}{p}\ \ p^2\ -3p\ +\ 2\ \ 0$

$(p-1)\ (p-2)\ \ 0$

$p\ \ 1$ atau $p\ \ 2$ untuk $p\ \ 1$ maka $x-\ 1\ \ 7\ \ x\ \ 8$

karena syaratnya $x\ -\ 1\ \ 0$

sehingga x 1 dan $x\ \ 8$ diperoleh $1\ \ x\ \ 8$ untuk $p\ \ 2$ maka

$x-\ 1\ \ 49\ \ x\ 50$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { $x\ 1\ \ x\ \ 8\ atau\ x\ \ 50$ }

D. Rangkuman

1. Bilangan bulat positif d disebut FPB dari a dan b jika dan hanya jika:
   (i). $d|a$ dan $d|b$
   (ii). jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \le d$.
   Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB(a,\ b)$. Beberapa hal yang perlu diketahui tentang FPB antara lain:
   (i). FPB (0,0) tidak didefinisikan.
   (ii). FPB (a, b) selalu bilangan bulat positif, sehingga FPB $(a, b) \ge 1$.
   (iii). FPB (a, b) = FPB $(a, -b)$ = FPB $(-a, b)$ = FPB $(-a, -b)$.
2. Jika $a_{1,}.a_{2,}\dots a_n$ bilangan-bilangan bulat dengan $ai \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari $a_{i,}.a_{2,}\dots\ a_n$
   KPK dari $a1, a2, \dots, an$ dituliskan sebagai $KPK\ [a1, a2, \dots, an]$.
3. Rumus umum suku ke –n adalah: $u_n = a + (n-1)\ b$, sedangakan rumus umum deret aritmatika adalah $Sn\ = \frac{1}{2}\ n(a\ +\ un\ ) = \frac{1}{2}\ n[(2a\ +\ (n\ -\ 1)b]$
4. Rumus umum suku ke-n barisan geometri adalah $u_n = ar^{n-1}$, sedangkan rumus umum deret geometri adalah $Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ untuk $r < 1$ atau $Sn = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$,untuk $r > 1$.

5. Sifat-sifat logaritma sebagai berikut:
   (1) ${}^{g}\log (a \times b) = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$
   (2) ${}^{g}\log \left(\frac{a}{b}\right) = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b$
   (3) ${}^{g}\log a^{n} = n \times {}^{g}\log a$
   (4) ${}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$
   (5) ${}^{g}\log a = \frac{1}{{}^{a}\log g}$
   (6) ${}^{g}\log a \times {}^{a}\log b = {}^{g}\log b$
   (7) ${}^{g^{n}}\log a^{m} = \frac{m}{n}\, {}^{g}\log a$
   (8) $g^{{}^{g}\log a} = a$

Pembelajaran 2. Aljabar dan Program Linear

A. Kompetensi

1. Menggunakan bentuk aljabar dan sistem persamaan untuk meyelesaikan masalah
2. Menggunakan matriks dan vektor untuk memecahkan masalah
3. Menerapkan program linear untuk memecahkan masalah

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bentuk-bentuk aljabar
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan danpertidaksamaan linear
3. Menyelesaikan masalah dengan sistem persamaan linear
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian atau invers matrik
5. Menyelesaikan masalah menggunakan vektor
6. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi
7. Membuat model matematika dari suatu masalah kontekstual
8. Menyelesaikan masalah program linear denganmetode grafik
9. Menyelesaikan masalah program linear dengan metode simpleks
10. Menyelesaikan masalah dualitas

C. Uraian Materi

1. Bentuk Aljabar dan Sistem Persamaan Linear

Bentuk Aljabar

Definisi 1.1

Bentuk Aljabar adalah suatu bentuk matematika yang dalam penyajiannya memuat huruf-huruf untuk mewakili bilangan yang belum diketahui.

Dalam suatu bentuk aljabar terdapat unsur-unsur aljabar, yang meliputi variabel (peubah), koefisien, konstanta, faktor, dan suku (suku sejenis dan suku tidak sejenis). Contoh bentukaljabaradalah sebagai berikut.

Contoh 1.1

a) $2x+1$ merupakan bentuk aljabar dengan variabel x, koefisien x adalah 2, dan konstanta 1.

b) $2x^2+8x^2y$ merupakan bentuk aljabar dengan variabel x dan y, koefisien x^2 adalah 2, koefisien x^2y adalah 8, dan tidak memuat konstanta.

Suku

Suku adalah bagian dari bentuk aljabar yang dipisah dengan tanda $-$ atau +.

Contoh 1.2

a) $9a+2b$ terdiri dari dua suku yaitu $9a$ dan $2b$.

b) $3n^2-2n-4$ terdiri dari tiga suku yaitu $3n^2, 2n \text{ dan } -4.$

Penyebutan untuk satu suku disebut suku tunggal, untuk dua suku disebut binom, untuk tiga suku disebut trinom, sedangkan suku banyak dinamai dengan polinom.

Faktor

Faktor adalah bilangan yang membagi bilangan lain atau hasil kali.

Contoh 1.3

Bentuk aljabar $m \times n \times o.$ atau mno memiliki faktor $m, n, \text{dan } o.$.

Koefisien

Koefisien adalah faktor bilangan pada hasil kali dengan suatu peubah.

Contoh 1.4

$5n^3+2y-2$ adalah bentuk aljabar dengan 5 sebagai koefisien dari $5n^3$, sedangkan 2 adalah koefisien dari $y.$

Konstanta

Konstanta adalah lambang yang menyatakan bilangan tertentu (bilangan konstan / tetap) .

Contoh 1.5

$5n^3 + 2y - 2$ adalah bentuk aljabar dengan *-2* sebagai konstanta.

Suku sejenis dan tidak sejenis

Suku sejenis memiliki peubah dan pangkat dari peubah yang sama. Jika berbeda, disebut dengan suku tidak sama atau suku tidak sejenis.

Contoh 1.6

$2pq + 5pq$ merupakan bentuk aljabar suku sejenis, sedangkan $2xy + 3n$ merupakan bentuk aljabar suku tidaksejenis.

a. Operasi Bentuk Aljabar

Operasi hitung pada bentuk aljabar tidak berbeda dengan operasi hitung pada bilangan bulat, yakni penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Operasi hitung penjumlahan dan pengurangan suku aljabar dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan koefisien antara suku-suku yang sejenis.

Contoh 1.7

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar berikut ini.

a). $4x + 3y - 2x$

b). $5a^2b - 2b - 3a^2b$

Penyelesaian:

a). $4x + 3y - 2x = 4x - 2x + 3y = 2x + 3y$

b). $5a^2b - 2b - 3a^2b = 5a^2b - 3a^2b - 2b = 2a^2b - 2b$

Operasi hitung perkalian dan pembagian suku aljabar dilakukan dengan menggunakan sifat-sifat operasi hitung pada bilangan riil, yakni:

1) Sifat komutatif penjumlahan, yaitu a + b = b + a

2) Sifat asosiatif penjumlahan, yaitu a + (b + c) = (a + b) + c

3) Sifat komutatif perkalian, yaitu a × b = b × a
4) Sifat asosiatif perkalian, yaitu a × (b × c) = (a × b) × c
5) Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, yaitu: $a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$

Contoh 1.8

Tentukan hasil perkalian dan pembagian bentuk aljabar berikut ini.

a). $4x(3y + 2x)$

b). $(5a^2b - 2ab) : a$

Penyelesaian:

a). $4x(3y + 2x) = 12xy + 8x^2$

b). $(5a^2b - 2ab) : a = 5ab - 2b$

b. Perkalian antar Suku Bentuk Aljabar

Pada perkalian antar suku bentuk aljabar, kita dapat menggunakan sifat distributif sebagai konsep dasarnya.

Perkalian suku satu dengan suku dua atau suku banyak

Contoh 1.9

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut:

a). $4x(3x + 2y)$

b). $8a(3ab - 2ab^2 - 8ab)$

Penyelesaian:

a). $4x(3x + 2y) = 12x^2 + 8xy$

b). $8a(3ab - 2ab^2 - 8ab) = 24a^2b - 16a^2b^2 - 64a^2b = -40a^2b - 16a^2b^2$

Perkalian suku dua dengan suku dua

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Contoh 1.10

Tentukan hasil dari $(x - 2y)^2$!

Penyelesaian:

$$(x-2y)^2=(x-2y)(x-2y)=x^2-2xy-2xy+4y^2=x^2-4xy+4y^2$$

Selisih dua kuadrat

Contoh 1.11

Tentukan hasil dari $(x-3(x+3)!$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(x-3(x+3) &= (x-3)(x+3)\\ &= x^2+3xy-3xy+9\\ &= x^2-9\end{aligned}$$

c. Pemfaktoran Bentuk Aljabar

Dalam suatu bentuk aljabar dapat ditentukan variabel, koefisien variabel, konstanta, faktor, dan suku. Bentuk *xy* merupakan perkalian dari *x* dengan *y,* sehingga dalam hal ini menjadi faktor dari *xy* adalah *x* dan *y.* Begitu juga dengan bentuk *a(x + y),* dimana faktor dari *a(x + y)* adalah *a* dan *(x + y).*Bentuk aljabar *x+ y* sebagai faktor dari bentuk *a(x + y)* mempunyai suku *x* dan *y*.

Untuk memfaktorkan bentuk aljabar dapat dilakukan dengan menggunakan hukum distributif. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari faktor persekutuan terbesar dari setiap suku aljabar.

Contoh 1.12

Faktorkanlah bentuk aljabar berikut ini!

a). $2x^2-8x^2y$

b). $12abc-15xyz$

c). $3x^2y-15xy^2z$

Penyelesaian:

a). $2x^2-8x^2y=2x^2(1-4y)$ (FPB dari $2x^2$ dan $8x^2y$ adalah $2x^2$)

b). $12abc-15xyz=3(4abc-5xyz)$

c). $3x^2y-15xy^2z=3xy(x-5yz)$ (FPB dari $3x^2y$ dan $15xy^2z$ adalah $3xy$)

Agar lebih memahami operasi bentuk aljabar, Saudara dapat membuka tautan berikut

https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Ope-rasi-pada-Bentuk-Aljabar-1-2011/konten1.html

dan

https://sumberbelajar.belajar.-kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-pada-Bentuk-Aljabar-2-2011/kon-ten1.html.

Persamaan dan Pertidaksamaan

a. Persamaan

Definisi 1.2

Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda hubung " = " (sama dengan).

Definisi 1.3

Persamaan linear dengan satu variabel (PLSV) adalah suatu persamaan yang memiliki satu variabel (peubah) dan pangkat tertingginya satu.

Bentuk umumnya **:** $ax + b = c, a \neq 0$ sebagai variabel.

Contoh 1.13

$8x - 9 = 15$ merupakan PLSV dengan variabel x.

Perhatikan bahwa suatu PLSV dapat bernilai benar atau salah bergantung pada nilai yang digantikan ke variabelnya. Oleh karena itu, dalam suatu PLSV dikenal yang namanya penyelesaian atau solusi.

Definisi 1.4

Penyelesaian (solusi) dari suatu PLSV adalah bilangan real yang menggantikan variabel sehingga persamaan tersebut menjadi bernilai benar.

Contoh 1.14

Tentukan solusi dari $8x - 9 = 15$

Penyelesaian:

Bentuk tersebut dapat diselesaikan menjadi:

$$\begin{aligned} 8x-9 &= 15 \\ \Leftrightarrow 8x &= 24 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Jadi solusi dari adalah 3.

Definisi 1.5

Persamaan linear dengan dua variabel (PLDV) adalah persamaan yang memiliki dua peubah dan pangkat tertingginya satu.

Bentuk umumnya**:** $ax+by=c; a\neq 0; b\neq 0$ dengan x dan y sebagai variabel.

Contoh 1.15

$3x+2y=7$ merupakan PLDV dengan variabel x dan y.

Perhatikan pula bahwa suatu PLDV dapat bernilai benar atau salah bergantung pada nilai yang digantikan ke variabelnya. Oleh karena itu, dalam suatu PLDV dikenal pula yang namanya penyelesaian atau solusi.

Definisi 1.6

Penyelesaian (solusi) dari PLDV $ax+by=c$ adalah bilangan terurut (x_1, y_1) sedemikian hingga jika disubstitusikan x_1 untuk *x* dan y_1 untuk *y* mengakibatkan persamaan menjadi bernilai benar.

Himpunan penyelesaian (HP) dari PLDV adalah himpunan semua bilangan terurut (x_1, y_1) yang merupakan solusi dari PLDV tersebut.

Perlu ditekankan bahwa $(x_1, y_1)\neq\{x_1, y_1\}$.

Contoh 1.16

Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari $3x+2y=7$.

Penyelesaian:

Diperoleh pasangan berurutan (x_1, y_1) dengan $y_1=\frac{7-3x_1}{2}$ untuk $x_1\in R$ merupakan solusi dari PLDV tersebut.

Jadi HP dari $3x+2y=7$ adalah $\left\{(x_1, y_1) | y_1=\frac{7-3x_1}{2}, x_1\in R\right\}$ atau dapat dituliskan sebagai $\left\{\left(x_1, \frac{7-3x_1}{2}\right) | x_1\in R\right\}$.

b. Pertidaksamaan

Mari kita ingat kembali persamaan linear. Persamaan linear satu variabel dinyatakan dalam bentuk $x = a$, dengan a suatu konstanta. Persamaan linear 2 variabel dapat disajikan dalam bentuk $y = mx + c$ atau $ax + by = c$ dengan $a, b, c,$ dan m merupakan suatu konstanta. Menurut El-khateeb (2016), pertidaksamaan adalah kalimat matematis yang dibangun dengan menggunakan satu atau lebih simbol $(<, >, \leq,$ atau $\geq)$ untuk membandingkan 2 kuantitas. Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu. Pertidaksamaan linear satu variabel dinyatakan dalam bentuk $x < a$. Pertidaksamaan linear 2 variabel dapat dinyatakan dalam 2 bentuk yaitu $y < mx + c$ atau $ax + by < c$. Apakah tanda pertidaksamaan linear hanya $"<"$ saja? Ternyata tidak. Untuk tanda pada pertidaksamaan linear bisa berupa $<, >, \leq,$ atau $\geq$. Bentuk $x + 5 \leq 2x - 6$ dan $x - 3 > 9$, merupakan contoh pertidaksamaan linear satu variabel sedangkan bentuk, $2x - 5y \leq 10$ dan $-x + 2y \geq 5$ merupakan contoh pertidaksamaan linear dua variabel.

Menyelesaikan pertidaksamaan artinya mencari nilai dari variabel yang membuat hubungan dua kuantitas dalam urutan yang benar. Nilai dari variabel yang membuat pertidaksamaan menjadi kalimat yang benar disebut penyelesaian pertidaksamaan. Himpunan semua penyelesaian dari pertidaksamaan disebut himpunan penyelesaian pertidaksamaan.

Yuk ingat kembali. Penyelesaian untuk persamaan linear satu variabel merupakan suatu bilangan, penyelesaian persamaan linear dua variabel merupakan suatu titik. Bagaimana dengan penyelesaian pertidaksamaan linear?. Untuk mendapatkan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel dilakukan prosedur sebagai berikut.

a. Tambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.

b. Kurangkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
c. Kalikan atau bagi kedua ruas dengan bilangan positif yang sama.
d. Jika mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik.

Contoh 1.17

Diberikan pertidaksamaan $-6x-3\geq 21$. Tentukan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa:

$-6x-3\geq 21$

$\Leftrightarrow \quad -6x-3+3 \quad \geq \quad 21+3$

$\Leftrightarrow \quad -6x \quad \geq \quad 24$

$\Leftrightarrow \quad -6x.-\frac{1}{6} \quad \leq \quad 24.-\frac{1}{6}$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{6}$ dan tanda pertidaksamaan dibalik menjadi $\leq$)

$\Leftrightarrow \quad x \leq -4$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x\leq -4,\ x \text{ bilangan ganjil}\}$

Cek kebenarannya dengan mengambil beberapa bilangan

$x=-5$	$-6.(-5)-3=27\geq 21$	Benar
$x=-5{,}5$	$-6.(-5{,}5)-3=30\geq 21$	Benar
$x=-6$	$-6.(-6)-3=33\geq 21$	Benar

Berdasarkan Contoh 1.17 di atas, himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel adalah himpunan bilangan yang membuat pertidaksamaan linear satu variabel menjadi kalimat yang benar.

Selanjutnya, bagaimana menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel? Sebelum dibahas prosedur menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel, didefinisikan dahulu **paruh bidang** (*half-plane*).

Definisi1.7

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dalam bentuk $ax+by<c$ terdiri dari titik-titik pada salah satu sisi garis yang didefinisikan dalam bentuk $ax+by=c$. Grafik pertidaksamaan linearnya disebut **paruh bidang** (half-plane)

Menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel dengan cara sebagai berikut.

a. Ubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan. Gambar garis l yang persamaannya $ax + by = c$ (putus-putus jika tanda $<$ atau $>$, tidak putus-putus jika tandanya $\leq$ atau $\geq$).

b. Ambil titik uji P yang tidak berada pada garis l dan cek apakah memenuhi pertidaksamaan. Jika titik *P*memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) yang memuat P. Jika titik *P* tidak memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) di sisi lain garis l.

c. Arsir daerah yang tidak memenuhi pertidaksamaan.

d. Himpunan penyelesaiannya dalam gambar berupa daerah sehingga disebut dengan daerah penyelesaian.

Contoh 1.18

Gambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear $2x + 3y < 12$

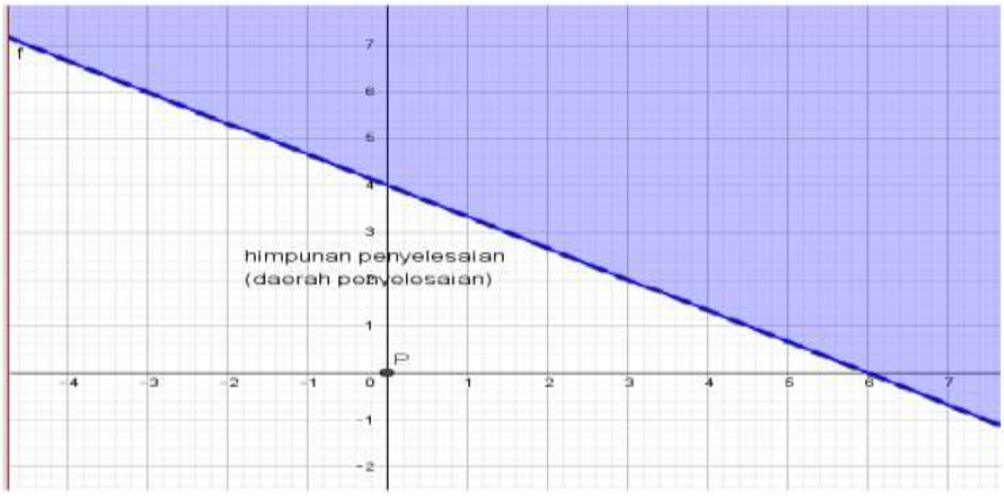
Penyelesaian:

Pertama ubah $2x + 3y < 12$ menjadi $2x + 3y = 12$

Kedua, gambar garis f yang persamaannya $2x + 3y = 12$

Ketiga, pilih titik uji $P(0,0)$. Substitusi $P(0,0)$ ke $2x + 3y < 12$

Diperoleh $0 < 12$, bernilai benar.



Gambar 10 himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir.

Berdasarkan Contoh 1.18 di atas, himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel adalah himpunan titik-titik yang membuat pertidaksamaan linear dua variabel menjadi kalimat yang benar.

Dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel membentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Untuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel, bagaimana menentukan himpunan penyelesaiannya?. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah semua titik yang memenuhi semua pertidaksamaan dalam sistem pertidaksamaan tersebut. Langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah sebagai berikut.

a. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan yang pertama.
b. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan yang kedua, dst
c. Himpunan penyelesaian (berupa daerah penyelesaian) sistem pertidaksamaan linear dua variabelnya adalah irisan dua daerah penyelesaian pada langkah 1 dan 2.

Contoh 1.19

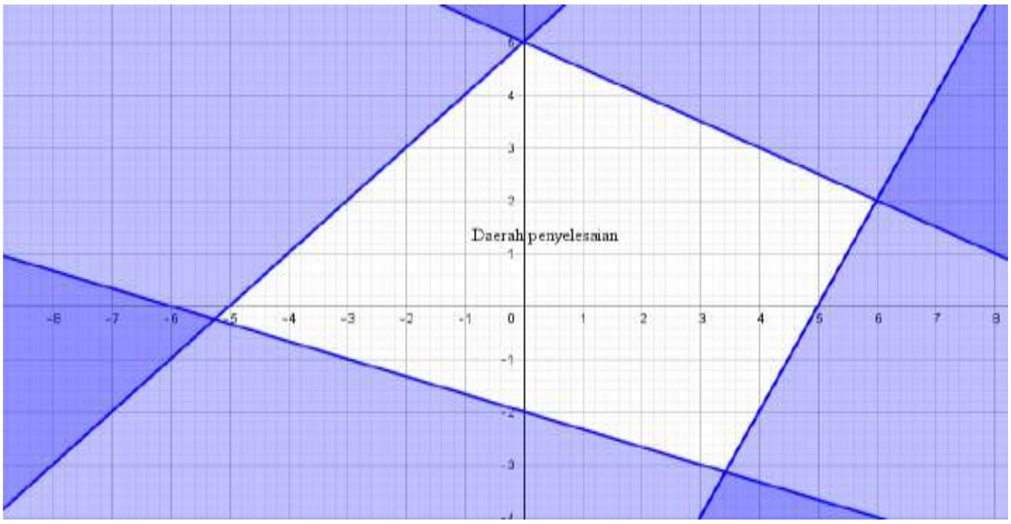
Dipunyai sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ -x + y \leq 5 \\ 2x - y \leq 10 \\ -x - 3y \leq 6 \end{cases}$$

Gambarkan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

Dengan menggambar grafik (garis lurus) dari setiap persamaan yang diketahui dan melakukan pengujian untuk suatu titik tertentu terhadap pertidaksamaan yang bersangkutan, maka diperoleh gambar penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Gambar 11 daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir.

Agar lebih memahami materi persamaan dan pertidaksamaan linear, Saudara dapat membuka tautan https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumber-belajar/tampil/Persamaan-Linier-Satu-Variabel-PLSV--2012/konten1.html dan https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Penggunaan-Penyelesaian-PLSV-dan-PtLSV-2011/konten1.htmlhttps://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Penggunaan-Penyelesaian-PLSV-dan-PtLSV-2011/konten1.html

2. Sistim Persamaan Linear

a. Pengertian Sistem Persamaan Linear (SPL) dan solusi SPL

Definisi 1.8

Persamaan linear dengan n variabel adalah persamaan yang berbentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ bilangan-bilangan riil dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tidak semuanya nol.

Sistem persamaan linear (SPL) yang terdiri atas n persamaan dengan p variable

$$x_1, x_2, ..., x_p \text{ berbentuk} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

dengan a_{ij} dan b_i bilangan-bilangan real untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$ dan $j = 1, 2, ..., p$

Bilangan-bilangan terurut (c1, c2, …, cp) disebut **penyelesaian (solusi)** untuk SPL (*) jika

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1p}c_p = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2p}c_p = b_2 \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{np}c_p = b_n \end{cases}$$

Bilangan-bilangan a_{ij} untuk setiap i=1,2,…,n dan j=1,2,…, p dalam (*) dinamakan koefisien variabel-variabel SPL, sedangkan biuntuk setiap i= 1,2,…,n dinamakan konstanta SPL.

Penggunaan tanda “{“ dalam (*) menunjukkan bahwa bentuk tersebut merupakan suatu sistem, artinya persamaan-persamaan tersebut saling terkait. Oleh karenanya dalam penulisan suatu SPL digunakan tanda “{“. Terkadang “tanda kurung kurawal” diletakkan di bagian belakang, sehingga menggunakan tanda “}”.

Sebagaimana sistem persamaan yang sering dikenal yakni SPLDV (sistem persamaan linear dua variabel) dan SPLTV (sistem persamaan linear tiga variabel), maka bentuk umum SPLDV dan SPLTV dituliskan sebagai berikut.

$$\text{SPLDV dengan dua persamaan} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \ldots \; (**)$$

$$\textit{atau} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

$$\text{SPLTV dengan } \textit{tiga} \text{ persamaan} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \dots (***)$$

$$\textit{atau} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Himpunan semua penyelesaian dari suatu SPL dinamakan Himpunan Solusi atau Himpunan Penyelesaian (HP).

Sebelum mempelajari materi pada kegiatan belajar ini, mahasiswa diminta memperhatikan [VIDEO SIMULASI SPL DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI] pada https://www.youtube.com/watch?v=bhcbzG_d9r8

Contoh 1.20

$$\text{Bentuk} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 13 \\ 2x + y - 4z = -11 \end{cases}$$

, merupakan sistem persamaan linear tiga variabel dengan tiga persamaan. Bilangan terurut (2, -1, 3) merupakan solusi SPL tersebut.

Sedangkan himpunan penyelesaian SPL tersebut adalah HP={(2,-1,3)}.

Perhatikan bahwa HP suatu SPL merupakan himpunan, sehingga **tidak benar** jika himpunan penyelesaian SPL tersebut dituliskan dengan HP=(2,-1,3).

b. Jenis-jenis SPL

Dengan menggunakan matriks, maka

$$\text{SPL} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3p}x_p = b_3 \end{cases}$$

dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$ atau AX = B, dengan

$$A_{n\times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, X_{p\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{pmatrix}, B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

Berdasarkan SPL dalam bentuk AX=B, maka SPL dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

(1) SPL homogen, jika B=O.

(2) SPL non homogen, jika B $\neq$ O.

Berdasarkan solusi yang dimiliki oleh SPL, maka SPL dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

(1) SPL konsisten (consistent), jika SPL tersebut mempunyai solusi.

(2) SPL tak konsisten (inconsistent), jika SPL tersebut tidak mempunyai solusi.

SPL homogen pasti mempunyai solusi, yakni solusi nol yang berbentuk (0, 0, …, 0). Dengan demikian SPL homogen selalu konsisten.

Ada beberapa sifat yang terkait dengan SPL dalam bentuk AX=B, antara lain dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.1

Jika A matriks berukuran nxn, maka pernyataan berikut ekivalen.

(1) A invertible (mempunyai invers).

(2) SPL AX=O hanya memiliki solusi nol.

(3) SPL AX=B konsisten untuk setiap matriks B berukuran n×1.

(4) SPL AX=B memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks B berukuran n×1.

Bukti teorema ini diserahkan kepada Saudara sebagai latihan.

Teorema 1.2

Misalkan A matriks berukuran *m*×*n*, X matriks berukuran *n*×1, dan B matriks berukuran *m*×1.

(1) *Jika m*< n maka SPL AX=B mempunyai tak hingga banyak solusi.

(2) *Jika m = n* dan det(A)=0 maka SPL AX=O mempunyai solusi tak nol.

Bukti teorema ini diserahkan kepada Saudara sebagai latihan

Contoh 1.21

$SPL \quad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$, merupakan sistem persamaan linear konsisten dan hanya mempunyai solusi nol.

c. Metode Penyelesaian SPL

Ada beberapa cara (metode) yang sering digunakan untuk menentukan solusi dari suatu SPL, seperti **metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan metode gabungan (eliminasi dan substitusi)**. Khusus untuk metode grafik lebih tepat digunakan untuk SPLDV. Selanjutnya akan diberikan contoh penggunaan metode lainnya untuk SPLTV.

Pandang SPLTV berikut.

SPLTV dengan 3 persamaan $\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3p}x_p = b_3$

1) Metode Substitusi

Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian SPLTV menggunakan metode substituasi adalah sebagai berikut.

(1) Pilih salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x_1 sebagai fungsi x_2 dan x_3, atau x_2 sebagai fungsi x_1 dan x_3, atau x_3 sebagai fungsi x_1 dan x_2.

(2) Substitusikan x_1 atau x_2 atau x_3 yang diperoleh pada langkah 1 ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga didapat PLDV.

(3) Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 2.

(4) Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 3 ke salah satu persamaan semula sehingga diperoleh nilai variabel yang ketiga.

Contoh 1.22

Diketahui sebuah sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x + y - 2z = 4 \\ 7x - 6y - z = 10 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode substitusi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas kita dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1: Pilih salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z, atau y sebagai fungsi x dan z, atau z sebagai fungsi x dan y.

Misalkan kita pilih persamaan pertama dan kita nyatakan sebagai fungsi y dan z, diperoleh:

$$x - 2y + z = 6 \Leftrightarrow x = 2y - z + 6$$

Langkah 2: Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah 1 ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga didapat PLDV.

Substitusikan $x = 2y - z + 6$ ke persamaan $3x + y - 2z = 4$ dan $7x - 6y - z = 10$, diperoleh:

$$\begin{aligned} &3(2y - z + 6) + y - 2z = 4 \\ &\Leftrightarrow 6y - 3z + 18 + y - 2z = 4 \\ &\Leftrightarrow 7y - 5z = -14 \qquad \text{.....(1)} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} &7(2y - z + 6) - 6y - z = 10 \\ &\Leftrightarrow 14y - 7z + 42 - 6y - z = 10 \\ &\Leftrightarrow 8y - 8z = -32 \\ &\Leftrightarrow y - z = -4 \qquad \text{.....(2)} \end{aligned}$$

Langkah 3: Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 2.

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{cases} 7y-5z=-14 \\ y-z=-4 \end{cases}$$

Nyatakan $y-z=-4$ ke bentuk $y=z-4$.

Substitusikan $y=z-4$ ke persamaan $7y-5z=-14$, diperoleh:

$$\begin{aligned} &7(z-4)-5z=-14 \\ \Leftrightarrow\ &7z-28-5z=-14 \\ \Leftrightarrow\ &2z=14 \\ \Leftrightarrow\ &z=7 \end{aligned}$$

Substitusikan $z=7$ ke persamaan $y=z-4$, diperoleh: $y=7-4=3$

Langkah 4: Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 3 ke salah satu persamaan semula sehinga diperoleh nilai variabel yang ketiga.

Substitusikan $y=3$ dan $z=7$ ke persamaan $x=2y-z+6$, diperoleh:

$$x=2(3)-7+6=6-7+6=5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5,3,7)\}$

2) Metode Eliminasi

Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian SPLTV menggunakan metode eliminasi adalah:

(1) Eliminasi salah satu variabel atau atau sehingga diperoleh SPLDV.

(2) Selesaikan SPLDV yang didapat pada langkah 1.

(3) Substitusikan nilai-nilai variabel yang diperoleh pada langkah 2 ke dalam salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai variabel yang lain.

Contoh1.23

Diketahui sebuah sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-2z=4 \\ 7x-6y-z=10 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas, kita dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1: Eliminasi salah satu variabel atau atau sehingga diperoleh SPLDV.

$$x - 2y + z = 6 \quad \ldots\ldots. (1)$$
$$3x + y - 2z = 4 \quad \ldots\ldots. (2)$$
$$7x - 6y - z = 10 \quad \ldots\ldots. (3)$$

Kita eliminasi variabel *z* dari persamaan (1) dan (2), kemudian persamaan (2) dan (3).

$$Persamaan(1) \times 2 \quad \rightarrow \quad 2x - 4y + 2z = 12$$
$$Persamaan 2 \quad \rightarrow \quad \frac{3x + y - 2z \quad = 4}{5x - 3y = 16} +$$
$$5x - 3y = 16 \quad \ldots.. \quad (4)$$

$$Persamaan(2) \rightarrow 3x + y - 2z = 4Persamaan(3) \times 2$$
$$\rightarrow \frac{14x - 12y - 2z = 20}{-11x + 13y = -16} - -11x + 13y = -16.\ldots.(5)$$

Langkah 2: Selesaikan SPLDV yang didapat pada langkah 1.

Persamaan (4) dan (5) merupakan SPLDV

$$\{5x - 13y = -16 \ -11x + 13y = -16$$

Eliminasi variabel x pada persamaan (4) dan (5)

$$Persamaan(4) \times 11 \rightarrow 55x - 33y = 176Persamaan(5) \times 5$$
$$\rightarrow \frac{-55x + 65y = -80}{32y = 96} + y = 3$$

Eliminasi variabel y pada persamaan (4) dan (5)

$$Persamaan(4) \times 13 \quad \rightarrow \quad 65x \quad -39y = 208$$
$$Persamaan(5) \times 3 \quad \rightarrow \quad \frac{-33x + 39y = -48}{32x = 160} +$$
$$x = 5$$

Langkah 3: Substitusikan nilai-nilai variabel yang diperoleh pada langkah 2 ke dalam salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai variabel yang lain.

Substitusikan x = 5 dan y = 3 ke persamaan (1), diperoleh:

$$5-2(3)+z=6$$
$$z=6-1=5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5,3,7)\}$

3) Metode gabungan (eliminasi dan substitusi)

Dalam menentukan himpunan penyelesaian dengan menggunakan metode gabungan, dapat dilakukan dengan menggabungkan langkah-langkah dari metode substitusi dan metode eliminasi.

Contoh1.23

Diketahui sebuah sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-2z=4 \\ 7x-6y-z=10 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas, kita dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1: Eliminasi salah satu variabel atau atau sehingga diperoleh SPLDV.

$$x-2y+z=6 \quad \ldots\ldots. (1)$$
$$3x+y-2z=4 \quad \ldots\ldots. (2)$$
$$7x-6y-z=10 \quad \ldots\ldots. (3)$$

Kita eliminasi variabel *z* dari persamaan (1) dan (2), kemudian persamaan (2) dan (3).

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(1)\times 2 & \rightarrow & 2x-4y+2z=12 \\ Persamaan 2 & \rightarrow & \underline{3x+y-2z \quad =4} \; + \\ & & 5x-3y=16 \\ & & 5x-3y=16 \quad \ldots.. \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} Persamaan(2)\rightarrow & & 3x + y-2z=4 \\ Persamaan(3)\times 2 & \rightarrow & \underline{14x-12y-2z=20} \; - \\ & & -11x+13y=-16 \\ & & -11x+13y=-16 \quad \ldots.. \quad (5) \end{array}$$

Langkah 2: Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 1 dengan metode substitusi.

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ -11x + 13y = -16 \end{cases}$$

Nyatakan $5x - 3y = 16$ ke bentuk $x = \frac{3y+16}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3y}{5} + \frac{16}{5}$

Substitusikan $x = \frac{3y}{5} + \frac{16}{5}$ ke persamaan $-11x + 13y = -16$, diperoleh

$$-11\left(\frac{3y}{5} + \frac{16}{5}\right) + 13y = -16$$
$$\Leftrightarrow \frac{-33y}{5} + \frac{-176}{5} + 13y = -16$$
$$\Leftrightarrow \frac{32y}{5} = -16 + \frac{176}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{32y}{5} = \frac{96}{5} \Leftrightarrow \frac{32y}{5} = \frac{96}{5}(5)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{96}{32} = 3$$

Substitusikan y =3 ke persamaan $x = \frac{3y}{5} + \frac{16}{5}$, diperoleh:

$$x = \frac{3(3)}{5} + \frac{16}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Langkah 3: Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 2 ke salah satu persamaan semula sehingga diperoleh nilai variabel yang ketiga.

Substitusikan y = 3 dan x = 7 ke persamaan $x - 2y + z = 6$, diperoleh:

$$7 - 2(3) + z = 6$$
$$z = 5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5,3,7)\}$

3. Matriks dan Vektor pada Bidang dan Ruang

Definisi 2.1

Matriks adalah susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan pada susunan tersebut disebut entri atau komponen atau elemen dari matriks.

Contoh 2.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} & n & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Ukuran dari matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Matriks pertama pada Contoh 2.1 di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya 3 x 2. Bilangan pertama dari ukuran matriks menyatakan banyaknya baris, sedangkan bilangan kedua menyatakan banyaknya kolom.

Matriks ditulis dengan huruf besar dan skalar ditulis dengan huruf kecil. Skalar-skalar disini merupakan bilangan real. Komponen pada baris ke-i, kolom ke-j ditulis aij atau (A)ij .

Jadi, secara umum matriks mxn ditulis sebagai berikut.

$$A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{1n}\ \cdots\ a_{2n}\ \vdots\vdots\ a_{m1}\ a_{m2}\ \vdots\vdots\ a_3\ a_{mn}\ ] = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]$$

Notasi $[a_{ij}]_{m\times n}$digunakan apabila ukuran matriks diperhatikan dan notasi $[a_{ij}]$digunakan apabila ukuran matriksnya tidak diperhatikan.

Jenis-jenis Matriks

Misalkan matriks A = $[a_{ij}]$

(1) Matriks A disebut matriks *persegi* berorder n jika A mempunyai n baris dan n kolom.

Komponen a11, a22, …, ann disebut *komponen diagonal utama* dari A.

(2) Matriks A disebut *matriks segitiga bawah* jika semua komponen di atas diagonal utama nol.

(3) Matriks A disebut *matriks segitiga atas* jika semua komponen di bawah diagonal utama nol.

(4) Matriks A disebut *matriks segitiga* jika matriks A merupakan matriks segitiga atas atau segitiga bawah.

(5) Matriks A disebut *matriks diagonal* jika A merupakan matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah.

(6) Matriks A disebut *matriks skalar* jika A merupakan matriks diagonal dan komponen pada diagonal utama sama.

(7) Matriks A disebut *matriks identitas* jika A merupakan matriks persegi yang semua komponen pada diagonal utama adalah 1 dan komponen lainnya 0.

(8) Matriks A disebut *matriks nol* jika semua komponennya 0. Matriks nol ditulis O. Jika ukuran matriks diperhatikan maka matriks O berukuran pxq ditulis Opxq.

(9) Matriks A disebut *matriks kolom* jika hanya mempunyai satu kolom. Matriks A disebut *matriks baris* jika hanya mempunyai satu baris.

Definisi 2.2

Dua matriks dikatakan *sama* jika kedua matriks tersebut berukuran sama dan komponen yang bersesuaian sama.

Dengan notasi matriks, jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ berukuran sama maka

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \, dan \, j$

Operasi pada Matriks

Definisi 2.3

Jika A dan B matriks yang berukuran sama, maka jumlah A + B merupakan matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan komponen-komponen matriks A dan B yang bersesuaian.

Matriks yang ukurannya tidak sama tidak dapat dijumlahkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ berukuran sama,maka

$\lfloor A + B \rfloor i_j = ai_j + bi_j, \forall i \, dan \, j.$

Definisi 2.4

Jika A sebarang matriks dan α sebarang skalar, maka *hasil kali scalar* αA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap komponen dari A dengan α. Dalam notasi matriks, jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ maka $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

Definisi 2.5

Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks p x q dan $B = (b_{ij})$ matriks q x r maka *hasilkali* AB merupakan matriks berukuran p x r yang komponennya $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$

Definisi perkalian matriks memerlukan syarat banyaknya kolom dari matriks pertama, yaitu A, sama dengan banyaknya baris matriks kedua, yaitu B.

Jika syarat ini tidak dipenuhi maka perkaliannya tidak terdefinisi.

Teorema 2.1

Jika matriks berikut berukuran sedemikian sehingga operasi-operasinya dapat dilakukan dan $A = (a_{ij})$ bilangan real maka aturan berikut berlaku.

(1) A + B = B + A	sifat komutatif untuk penjumlahan
(2) A + (B + C) = (A + B) + C	sifat asosiatif untuk penjumlahan
(3) A(BC) = (AB)C	sifat asosiatif untuk perkalian
(4) A(B + C) = AB + AC	sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan
(5) (B + C)A = BA + CA	sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan

(6) $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$

(7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(8) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

(9) $\alpha(BC) = (\alpha B)C = \beta)A = B(\alpha C)$

Bukti (4)

Misalkan $A = \lfloor ai_j \rfloor_{p\times q}, B = \lfloor bi_j \rfloor_{q\times r}, C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{q\times r}$

Akan ditunjukkan komponen yang bersesuaian dari A(B + C) dan AB + AC adalah sama; yaitu (A(B + C))ij = (AB + AC)ij untuksetiapi dan j.

Berdasarkan definisi penjumlahan dan perkalian matriks diperoleh

$$\begin{aligned}
(A(B+C))_{ij} &= \sum_{i=1}^{q} (A)_{ik}(B+C)_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^{q} (A)_{ik}((B)_{kj}+C)_{kj}) \\
&= \sum_{i=1}^{q} (A)_{ik}(B)_{kj}+(A)_{ik}(B)_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^{q} (A)_{ik}(B)_{kj}+\sum_{i=1}^{q}(A)_{ik}(B)_{kj} \\
&= (AB)_{ij}+(AC)_{ij} \\
Jadi\ A(B+C) &= AB+AC
\end{aligned}$$

Bagian lain teorema ini diserahkan buktinya kepada pembaca.

Matriks AB dan BA tidak sama karena tiga alasan.

Pertama, AB terdefinisi tetapi BA tidak terdefinisi. Sebagai contoh jika A dan B berturut-turut berukuran 2x3 dan 3x3 maka AB terdefinisi tetapi BA tidak terdefinisi.

Kedua, AB dan BA keduanya terdefinisi tetapi ukurannya berbeda. Sebagai contoh jika A dan B berturut-turut berukuran 2x3 dan 3x2 maka AB berukuran 2x2 dan BA berukuran 3x3.

Ketiga, AB≠BA meskipun AB dan BA terdefinisi dan berukuran sama. Sebagai contoh

Untuk $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ diperoleh $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Invers Matriks

Definisi 2.6

Jika A matriks persegi dan terdapat matriks B sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A dikatakan invertibel dan B dikatakan *invers* A.

Jika A invertibel, maka inversnya dinyatakan dengan symbol A^{-1}

Contoh 2.2

Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ karena AB = I dan BA = I.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ tidak invertibel karena untuk sebarang matriks B berukuran 3 x 3 kolom ketiga dari BA adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sehingga BA≠I.

Teorema berikut ini menunjukkan ketunggalan invers matriks.

Teorema 2.2

Jika B dan C keduanya merupakan invers dari matriks A, maka B = C.

Bukti teorema ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 2.3

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibel jika ad – bc ≠ 0 dan $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Bukti

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ dan AB=BA=I

Karena AB = I maka $\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jadi, $\begin{cases} ap+br=1 \\ cp+dr=0 \end{cases} dan \begin{cases} aq+bs=0 \\ cq+ds=1 \end{cases}$

Dengan menyelesaikan persamaan (1), diperoleh solusi $p=\frac{d}{ad-bc}\ dan\ r=\frac{-c}{ad-bc}$

Dengan cara serupa, solusi persamaan kedua (2) adalah $q=\frac{-b}{ad-bc}\ dan\ s=\frac{-c}{ad-bc}$

Akibatnya, $B=\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Jadi, Jika B memenuhi AB = BA = I maka $ad-bc \neq 0$.

Akibatnya, matriks B merupakan invers of A. Jadi, $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Teorema 2.4

Jika A dan B mariks invertibel berukuran sama, maka

(1) AB invertibel

(2) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

Hasilkali matriks invertibel adalah invertibel dan invers hasilkali sama dengan hasilkali inversnya dengan urutan yang dibalik.

Definisi 2.7

Jika A matriks persegi, maka didefinisikan pangkat bulat non-negatif dari A, $A^0 = I \underbrace{A.A.A....A}_{n\ faktor} (n > 0)$

Jika A invertibel, maka didefinisikan pangkat bulat negatif dari A

$A^{-n} = (A^{-1})^n, (n > 0)$

Teorema 2.5

Jika A matriks persegi dan r dan s bilangan bulat, maka $A^r A^s = A^{r+s}\ dan\ (A^r)^s = A^{rs}$

Bukti untuk latihan.

Teorema 2.6

Jika A matriks invertibel, maka:

(1) A^{-1} invertibel dan $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) A^n invertibel dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ $untuk\ n = 0,1,2,3,....$

(3) Untuk sebarang skalar tak-nol k, matriks kA invertibel dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Bukti

(1) Karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ maka matrik A^{-1} invertible dan $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) Sebagai latihan

(3) $(kA)\frac{1}{k}A^{-1} = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = (\frac{1}{k}k)AA^{-1} = I.I = I$ dengan cara serupa diperoleh $(\frac{1}{k}A^{-1})(kA) = I$ jadi $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Transpos Matriks

Definisi 2.8

Jika A matriks p x q, maka *transpos* A, ditulis A^T, didefinisikan sebagai matriks q x p yang diperoleh dari menukar baris dan kolom A, yaitu kolom pertama dari A^T merupakan baris pertama matriks A, kolom kedua dari A^T merupakan baris kedua dari A, dan seterusnya.

Teorema berikut ini merupakan sifat utama dari tranpos.

Teorema 2.7

Jika ukuran matriks sedemikian sehingga operasi berikut ini dapat dilakukan, maka:

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA^T) = k(A^T)$, dengan k sebarang skalar.

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

Definisi 2.9

Suatu matriks n x n disebut *matriks elementer* jika dapat diperoleh dari matriks identitas In berukuran nxn dengan melakukan satu operasi baris elementer.

Contoh 2.3

$E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ kalikan baris pertama dari dengan -3,

$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menukar baris pertama dan kedua dari .

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tambahkan 3 kali baris ketiga ke baris pertama dari .

Matriks-matriks E_1, E_2, E_3 merupakan matriks-matriks elementer.

Teorema 2.8

Jika matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks elementer E, maka hasilnya EA adalah matriks A yang dikenai operasi baris elementer yang sama dengan operasi baris elementer yang dikenakan pada I untuk mendapatkan E. Bukti ditinggalkan untuk pembaca sebagai latihan.

Jika operasi baris elementer dikenakan pada matriks identitas I untuk menghasilkan matriks elementer E, maka terdapat operasi baris kedua sehingga ketika dikenakan ke E menghasilkan I kembali.

Teorema 2.9

Setiap matriks elementer adalah invertibel dan inversnya merupakan matriks elementer.

Teorema 2.10

Jika A matriks nxn , maka pernyataan berikut ekivalen.

(1) A invertibel.
(2) AX = 0 hanya mempunyai penyelesaian trivial.
(3) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah In.
(4) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks elementer.

Contoh 2.4

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \sim \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \sim \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 + 3R_3 \\ R_2 - 3R_3 \\ -R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jadi, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Perhatikan matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ R_3 + R_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Karena diperoleh baris nol pada bagian kiri maka B tidak invertibel.

Teorema 2.11

Setiap SPL mempunyai penyelesaian tunggal atau mempunyai tak-hingga penyelesaian atau tidak mempunyai penyelesaian.

Teorema 2.12

Jika A mariks n x n yang invertibel, maka untuk setiap matriks b berordo nx1, sistem persamaan Ax = b mempunyai tepat satu penyelesaian, yaitu

Bukti ditinggalkan untuk pembaca sebagai latihan.

Berikut ini disajikan contoh penggunaan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Contoh 2.5

Pandang SPL berikut

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$

$x_1 + 8x_3 = 17$

Dalam bentuk matriks SPL di atas dapat ditulis sebagai *Ax* = *b*, dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Telah ditunjukkan pada Contoh 2.4 bahwa A invertibel dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Akibatnya,

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

atau *x1* = 1, *x2* = -1, *x3* = 2.

Jadi, penyelesaian dari SPL tersebut adalah (1, -1, 2).

4. Program Linear

Program linear merupakan bagian dari Operation Research yang mempelajari masalah optimum. Prinsip pada program linear diterapkan dalam masalah nyata diantaranya dalam bidang ekonomi, kesehatan, pendidikan, perdagangan, transportasi, industri, sosial, dan lain-lain. Menurut Winston (1993), masalah program linear adalah masalah optimasi dalam hal sebagai berikut:

a. Usaha untuk memaksimalkan (atau meminimalkan) fungsi linear dari sejumlah variabel keputusan. Fungsi yang dimaksimalkan atau diminimalkan disebut fungsi tujuan/fungsi objektif.

b. Nilai variabel keputusan harus memenuhi sejumlah pembatas/kendala. Setiap pembatas/kendala harus dalam bentuk persamaan linear atau pertidaksamaan linear.

c. Nilai pada setiap variabel dibatasi. Untuk setiap variabel x_i, tanda batasnya nonnegatif atau x_i boleh tidak dibatasi tandanya.

Selain itu, menurut Barnett (1993), masalah program linear adalah masalah yang berkaitan dengan upaya menemukan nilai optimal (nilai maksimum atau minimum) dari fungsi tujuan (yang merupakan fungsi linear dalam bentuk $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, dengan variabel keputusan $x_1, x_2, ..., x_n$ tergantung pada kendala/pembatas masalahyang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linear. Kendala/pembatas masalah disebut sebagai fungsi kendala/pembatas (*constraints function*), Variabel keputusan pada masalah program linear harus bernilai non negative $x_1 \geq 0, i = 1, 2, ..., n$, Himpunan titik-titik yang memenuhi fungsi kendala dan persyaratan variabel keputusan (nonnegatif) disebut sebagai daerah penyelesaian fisibel *(feasible region*). Sebarang titik pada daerah penyelesaian fisibel yang menghasilkan nilai optimum (maksimum atau minimum) fungsi tujuan disebut sebagai penyelesaian optimum.

Penerapan masalah program linear dalam berbagai bidang kehidupan dapat diselesaikan dengan mengubahnya menjadi bentuk model matematika. Perhatikan Contoh 3.1 berikut ini.

Contoh 3.1.

Rafa sangat senang makan steak dan keripik kentang. Mulai saat ini Rafa mengurangi konsumsi makannya terutama steak dan keripik kentang. Rafa menyadari bahwa ia melakukan diet yang tidak sehat. Oleh karena itu, Rafa mengunjungi ahli gizi untuk meyakinkan dirinya bahwa makanan yang ia makan (steak dan keripik kentang) memenuhi persyaratan gizi. Informasi kebutuhan gizi yang terkandung dalam steak dan keripik kentang (per gram) penyajiannya beserta harganya disajikan dalam Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 4 Informasi kebutuhan gizi pada steak dan keripik kentang (per gram)

Kandungan	Kandungan Per Penyajian (gram)		Persyaratan Kebutuhan Harian (gram)
	Steak	Keripik Kentang	
Karbohodrat	5	15	≥ 50
Protein	10	5	≥ 40
Lemak	15	2	≤ 60
Harga per penyajian	4	2	

Rafa ingin menentukan banyaknya kebutuhan harian steak dan keripik kentang yang dapat dimakannya (boleh dalam bentuk pecahan) sehingga pengeluarannya minimum.

Untuk dapat memperoleh banyaknya steak dan keripik kentang (dalam gram) yang boleh dimakan Rafa maka masalah di atas haruslah diubah ke dalam bentuk model matematika. Model matematika memuat fungsi tujuan dan fungsi kendala. Menurut Suyitno (2014), langkah-langkah untuk membuat model matematika adalah sebagai berikut:

a. Menentukan tipe masalah (maksimum atau minimum).

b. Mendefinisikan variabel keputusan.

c. Merumuskan fungsi tujuan.

d. Merumuskan fungsi kendala.

e. Menentukan persyaratan nonnegatif.

Langkah-langkah tersebut diterapkan pada contoh di atas, diperoleh:

a. Tipe masalah adalah minimum.

b. Variabel keputusannya adalah:

$x =$ banyaknya steak yang dimakan (dalam gram),

$y =$ banyaknya keripik kentang yang dimakan (dalam gram)

c. Fungsi tujuannya adalah $z = 4x + 2y$

d. Fungsi kendalanya adalah $\begin{aligned} 5x + 15y &\geq 50 \\ 10x + 5y &\geq 40 \\ 15x + 2y &\leq 60 \end{aligned}$.

e. Persyaratan non-negatifnya adalah $x, y \geq r$

Jadi model matematikanya adalah Min: $z = 4x + 2y$

Harus memenuhi (h.m): $\begin{array}{l} 5x + 15y \geq 50 \\ 10x + 5y \geq 40 \\ 15x + 2y \leq 60 \end{array}$.

Bentuk baku model matematika suatu program linear untuk masalah maksimum adalah sebagai berikut.

$$\text{Maks}\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots. + c_nx_n$$

$$\text{h.}m: \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots. + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots. + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots. + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

Keterangan:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan variabel keputusan.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ merupakan kontribusi setiap variabel keputusan terhadap fungsi tujuan, disebut pula sebagai koefisien fungsi tujuan suatu model matematika.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ merupakan penggunaan setiap unit sumber daya dari setiap variabel keputusan yang terbatas, disebut pula koefisien fungsi kendala model matematika.

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ merupakan banyaknya ketersediaan sumber daya untuk dimanfaatkan sepenuhnya, disebut pula nilai ruas kanan fungsi kendala.

Perhatikan masalah berikut ini.

Seorang petani memiliki lahan 200 hektar dan ingin menanaminya dengan kentang atau labu kuning atau kombinasi keduanya. Dia melihat ada pasar untuk kedua tanaman ini dan tidak ingin menanam tanaman lainnya. Hasil maksimal panen kentang adalah 5 ton per hektar, dan jika labu kuning yang ditanam maka hasil panennya hanya 3 ton per hektar. Kentang dijual dengan keuntungan 50 poundsterling per ton sedangkan keuntungan labu kuning adalah 105 per ton. Kentang yang dipanen maksimal 750 ton dan labu kuning maksimal 300 ton per tahun untuk dijual bebas di pasar. Kedua benih akan membutuhkan pupuk dan rasio untuk setiap benih yang tumbuh memiliki batas mengenai pupuk yang tersedia. Petani menggunakan dua jenis pupuk, A dan B, yang dicampur dalam proporsi yang tepat untuk setiap benih. Dia percaya bahwa campuran untuk kentang seharusnya terdiri dari 40% pupuk A dan 60% pupuk B. Campuran untuk labu harus terdiri dari 55% pupuk A dan 45% pupuk B. Setiap hektar tanaman kentang membutuhkan 0,4 ton pupuk dan setiap hektar tanaman labu membutuhkan 0,5 ton pupuk. Ada batasan jumlah pupuk yang tersedia. Petani dapat membeli hingga 30 ton pupuk A dan 100 ton pupuk B. Pupuk A berkualitas lebih baik. Petani bisa meningkatkan kualitas B dengan menambahkan bahan-bahan tambahan. Jika dia melakukannya, semakin baik ton B dapat digunakan sebagai suplemen parsial atau total untuk 40% dari A yang diperlukan dalam campuran kentang. Namun, petani memperkirakan bahwa ini akan menyebabkan penurunan 10% dalam hasil. Penggunaannya tidak mungkin pada campuran labu karena hasilnya akan bencana. Untuk setiap ton pupuk B yang akan ditingkatkan dengan cara ini 0,1 ton diperlukan komponen tambahan, dengan biaya tambahan 45 pound. Silahkan dicoba membuat model matematika untuk memaksimalkan keuntungan petani!.

Nah, rekan-rekan mahasiswa sekalian. Kalian telah mempelajari konsep dasar program linear. Selanjutnya, kita akan membahas bagaimana menyelesaikan masalah program linear. Pada pembahasan di bawah ini, kita akan belajar menyelesaikan program linear menggunakan metode grafik. Selamat Belajar.

2. Metode Grafik

Untuk menyelesaikan masalah program linear yang melibatkan 2 variabel dan 2 atau lebih pertidaksamaan maka digunakan metode grafik. Metode grafik ini dibedakan 2 yaitu metode titik ekstrim (titik pojok) dan metode garis selidik. Sebelum membahas kedua metode tersebut, alangkah baiknya kita kenali istilah-istilah dan teorema-teorema berikut ini.

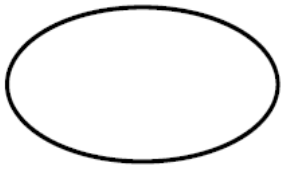
Menurut Dantzig dan Thapa (1997), **daerah penyelesaian fisibel** (*the feasible region*) atau disingkat DPF adalah himpunan titik-titik yang memenuhi semua fungsi kendala. Sedangkan Winston (1993) menyatakan daerah penyelesaian fisibel suatu program linear adalah himpunan semua titik yang memenuhi semua pembatas dan semua tanda batas program linear. Untuk masalah maksimum, penyelesaian optimalnya merupakan titik pada daerah penyelesaian fisibel yang menyebabkan nilai fungsi tujuan terbesar. Demikian pula untuk masalah minimum, penyelesaian optimalnya adalah titik pada daerah penyelesaian fisibel yang menyebabkan nilai fungsi tujuan terkecil.

Sebelum berbicara tentang titik ekstrim, mari kita definisikan terlebih dahulu himpunan konveks.

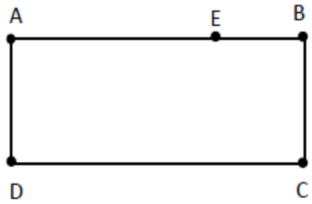
Definisi 3.1 himpunan konveks

“S merupakan himpunan titik-titik. S disebut himpunan konveks jika ruas garis yang menghubungkan sebarang titik di S berada di dalam S”

Perhatikan Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 di bawah ini.



Gambar 3.1Elips



Gambar 3.2 Persegi panjang

Gambar 12 dan Gambar 13 merupakan himpunan konveks.

Apakah rekan-rekan mahasiswa sudah paham himpunan konveks? Jika sudah paham, mari kita definisikan titik ekstrim.

Definisi 3.2 Definisi titik ekstrim

Pada sebarang himpunan konveks S, titik P di S disebut sebagai titik ekstrim jika setiap ruas garis yang berada di dalam S dan memuat titik P maka P merupakan titik akhir (ujung) dari ruas garis tersebut.

Berdasarkan definisi titik ekstrim, Gambar 3.1 memiliki tak hingga banyaknya titik ekstrim. Sedangkan pada Gambar 3.2 hanya ada 4 titik ekstrim yaitu titik A, titik B, titik C, dan titik D. Titik E bukan titik ekstrim. Mengapa? Karena ada ruas garis AB dan memuat titik E, namun titik E tidak berada di ujung ruas garis AB. Titik ekstrim biasanya berada di pojok sehingga disebut pula titik pojok. Menurut Barnett (1993), titik pojok daerah penyelesaian adalah titik pada daerah penyelesaian yang merupakan perpotongan dua garis pembatas. Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear disebut tertutup jika daerahnya tertutup dalam lingkaran. Jika tidak tertutup dalam lingkaran disebut tidak tertutup (terbuka).

Teorema 3.1 Teorema Fundamental Program Linear

a. Jika nilai optimal fungsi tujuan masalah program linear ada maka nilai tersebut dihasilkan oleh satu atau lebih titik pojok pada daerah penyelesaian fisibel.
b. Jika masalah program linear mempunyai penyelesaian tidak tunggal, sedikitnya satu dari penyelesaiannya berada pada titik pojok daerah penyelesaian fisibel.

Bukti Teorema ditinggalkan karena di luar cakupan materi ini.

Teorema 3.2 Teorema Eksistensi Penyelesaian Masalah Program Linear

a. Jika daerah penyelesaian fisibel masalah program linear tertutup maka nilai maksimum dan nilai minium fungsi tujuan ada.
b. Jika daerah penyelesaian fisibel masalah program linear tidak tertutup dan koefisien fungsi tujuan bernilai positif maka nilai minimum fungsi tujuan ada tetapi nilai maksimumnya tidak ada.
c. Jika daerah penyelesaian fisibel masalah program linear kosong (artinya tidak ada titik yang memenuhi semua fungsi kendala) maka nilai maksimum dan nilai minimum fungsi tujuan tidak ada.

Perhatikan Contoh 3.2 berikut ini.

Contoh 3.2.

Diberikan model matematika sebagai berikut.

Maks $z = 250x + 30y$

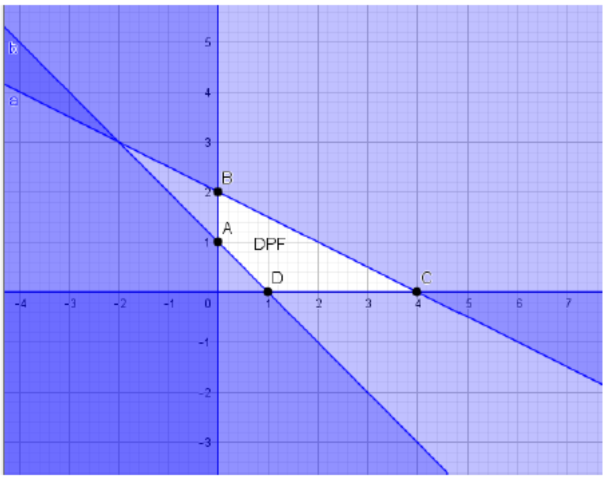
$$
\begin{array}{ll}
 & x + 2y \leq 4 \\
\text{h.m} & x + y \geq 1 \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
$$

Selesaikan model matematika di atas dengan metode titik ekstrim.

Penyelesaian:

a. Menggambar garis yang persamaannya $x + 2y = 4$ dan $x + y = 1$
b. Mengarsir daerah yang tidak memenuhi $x + 2y \leq 4; x + y \geq 1; x \square 0, y \geq 0$
c. Daerah Penyelesaian Fisibel (DPF) nya adalah daerah yang dibatasi segiempat ABCD dengan titik ektrim A, B, C, dan D. $A(0,1), B(0,2), C(4,0), dan\, D(1,0)$

Untuk menggambar daerah penyelesaian fisibel (DPF) lebih mudah menggunakan aplikasi Geogebra. Gambar 3.3 di bawah ini merupakan DPF contoh 3.2 yang digambar menggunakan aplikasi Geogebra.



Gambar 14. DPF penyelesaian contoh 3.2

d. Membandingkan nilai Z dari titik ekstrim untuk menentukan penyelesaian optimal. Perhatikan Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2 Perbandingan Nilai Z dari titik ekstrim O, A, B, C

Titik	$Z = 250x + 30y$
A (0,1)	250.0+30.1=30
B (0,2)	250.0+30.2=60
C (4,0)	250.4+30.0=1000 (maks)
D (1,0)	250.1+30.0=250

e. Jadi penyelesaian optimalnya adalah x = 4, y = 0 atau (4, 0) dengan Z maksimalnya = 1000.

Metode grafik yang kedua adalah metode garis selidik. Daerah penyelesaian fisibel sudah digambarkan, mencari nilai optimal (maks atau min) dapat pula dicari tanpa harus membandingkan nilai fungsi tujuan dari titik-titik ekstrim (pojok). Bagaimana caranya? Kita dapat menggunakan garis selidik. Garis selidik adalah garis-garis yang sejajar dengan garis pada fungsi tujuan. Untuk masalah maksimum, garis selidik itu disebut **isoprofit lines**, sedangkan untuk masalah minimum disebut **isocost lines.** Langkah-langkah menentukan nilai optimal dari fungsi tujuan $z : ax + by$ menggunakan metode garis selidik adalah sebagai berikut.

a. Menggambar DPF.

b. Menggambar garis yang persamaannya $ax + by = 0$

c. Menggambar garis-garis yang sejajar dengan $ax + by = 0$ dan melalui titik ekstrim. Garis sejajar ini disebut garis selidik.
d. Untuk masalah maksimum maka titik ekstrim terakhir yang dilalui garis selidik berkaitan dengan penyelesaian optimal. Sedangkan untuk masalah minimum, titik ekstrim pertama yang dilalui garis selidik berkaitan dengan penyelesaian optimal.

Contoh 3.3.

Selesaikan model matematika berikut ini dengan metode garis selidik.

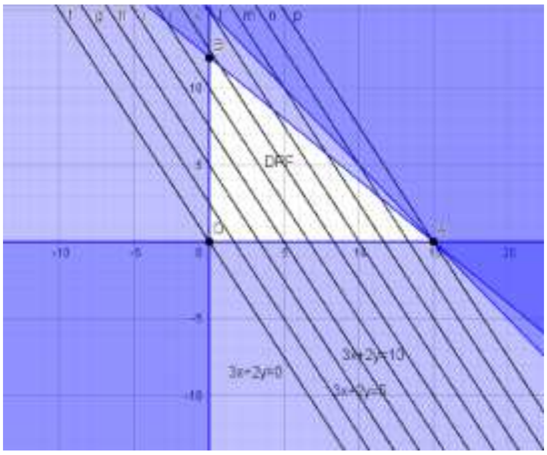
Maks $z = 3x + 2y$

$$\begin{array}{ll} & 4x + 5y \leq 60 \\ \text{h.m} & 2x + 2y \geq 30 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Jawab:

a. Menggambar DPF. DPFnya adalah daerah yang dibatasi oleh segitiga OAB dengan titik ekstrim O .
b. Menggambar garis yang persamaannya $3x + 2y = 0$.
c. Menggambar garis-garis yang sejajar dengan dan melalui titik ekstrim, misalnya $3x + 2y = 5$, $3x + 2y = 10$ $3x + 2y = 15$ dan sebagainya. Garis-garis ini disebut garis selidik.
d. Karena masalahnya maksimum, maka titik ekstrim terakhir yang dilalui garis selidik berkaitan dengan penyelesaian optimal. Titik ekstrim terakhirnya adalah A= (15,0) sehingga A=(15, 0)berkaitan dengan penyelesaian optimal.
e. $Z = 3(15) + 2(0) = 45$. Penyelesaian optimalnya adalah (15,0) dengan nilai maksimum 45.

Perhatikan Gambar 3.4 berikut ini.



Gambar 15 Penyelesaian soal pada contoh 3.3 menggunakan garis selidik

Apakah mungkin ditemukan bahwa nilai optimum (maksimum maupun minimum) dapat terjadi di lebih dari 2 titik? Apakah mungkin, kita tidak dapat menemukan nilai optimumnya? Ternyata, terdapat beberapa kasus program linear. Yaitu penyelesaian tidak tunggal (*multiple optimal solution*), ketidaklayakan (*infeasible solution*), kelebihan pembatas (*redundant constraint*), dan penyelesaian tidak terbatas (*unbounded solution*). Mari kita bahas satu persatu.

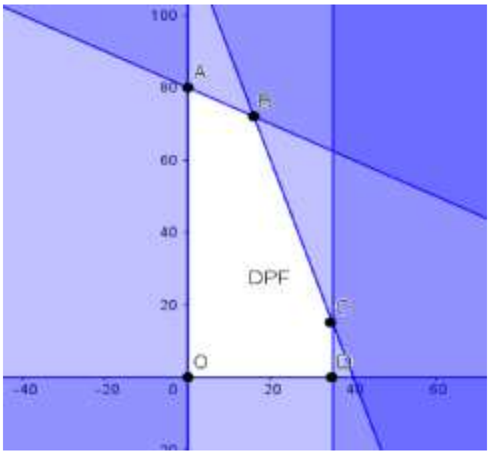
Kasus yang pertama adalah penyelesaian tidak tunggal. Terkadang kita jumpai ada model matematika yang nilai optimalnya tidak hanya di satu titik ekstrim namun juga terjadi di titik-titik lainnya. Perhatikan contoh 3.4 berikut ini.

Contoh 3.4.

Maks $z = 18x + 6y$

$$\text{h.m}\quad \begin{array}{l} 3x + y \le 120 \\ x + 2y \le 160 \\ x \le 35 \\ \quad x \ge 0, \\ \quad y \ge 0 \end{array}$$

Gambar DPF nya disajikan pada Gambar 3.5 berikut.



Gambar 16. DPF Contoh soal 3.4

DPFnya adalah daerah yang dibatasi segilima OABCD dengan titik ekstrim

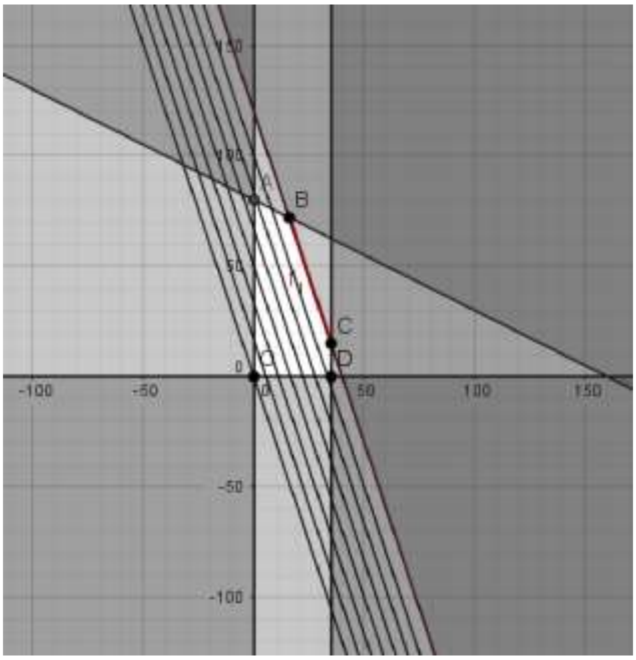
$$O = (0,0), A = (0,80), B = (16,72), C = (35,15), dan\ D = (35,0)$$

Membandingkan nilai fungsi tujuan titik-titik ekstrim disajikan dalam Tabel 3.3 berikut ini.

Tabel 3.3 Nilai Fungsi Tujuan Contoh soal 3.4

Titik ekstrim	$Z = 18x + 6y$
$O = (0,0)$	$Z = 18.0 + 6.0 = 0$
$A = (0,80)$	$Z = 18.0 + 6.80 = 480$
$B = (16,72)$	$Z = 18.16 + 6.72 = 720$
$C = (35,15)$	$Z = 18.35 + 6.15 = 720$
$D = (35,0)$	$Z = 18.35 + 6.0 = 630$

Berdasarkan Tabel 3.3 di atas kita dapatkan 2 titik yang memberikan nilai maksimum yaitu titik B dan C. Muncul pertanyaan, apakah ada titik lain yang juga memberikan nilai maksimum 720? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita gunakan metode garis selidik. Perhatikan Gambar 3.6 berikut ini.



Gambar 17. Menyelesaikan Contoh soal 3.4 menggunakan metode garis selidik.

Berdasarkan garis selidik, titik ekstrim terakhir yang berkaitan dengan penyelesaian optimal adalah titik B dan C. Terlihat pula bahwa garis selidik terakhir berimpit dengan ruas garis BC. Sehingga titik-titik selain titik B dan C pada ruas garis BC juga berkaitan dengan penyelesaian optimal. Jadi penyelesaian optimalnya adalah

$(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid 3x + 2y = 120, 16 \le x \le 35\}$. Nilai optimalnya adalah 720.

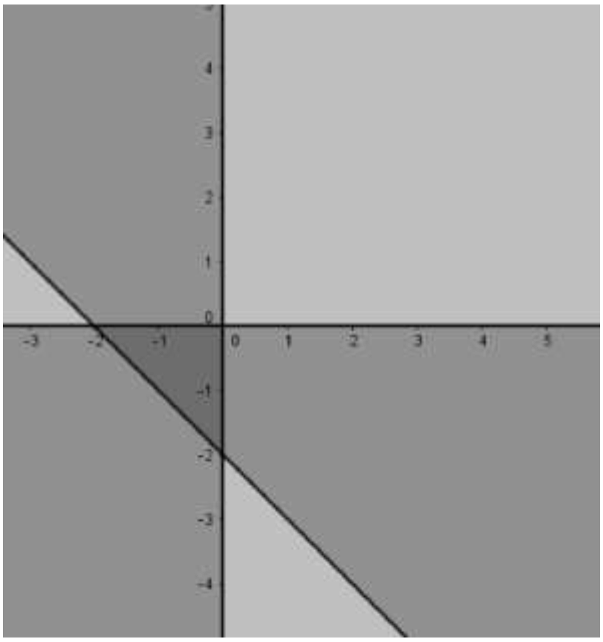
Kasus kedua adalah ketidaklayakan. Perhatikan Contoh 3.5 berikut ini.

Min $z = x + y$

h.m

$$\begin{aligned} x + y &\le -2 \\ x &\ge 0, \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Gambar DPFnya disajikan pada Gambar 3.7 sebagai berikut.



Gambar 18. DPF Contoh 3.5

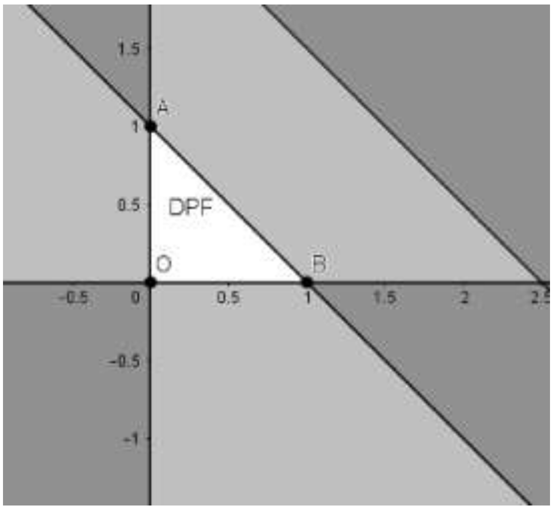
Berdasarkan Gambar 3.7 di atas, tidak ada daerah penyelesaian fisibel sehingga disebut ketidaklayakan. Penyelesaian optimalnya adalah himpunan kosong.

Kasus ketiga adalah kelebihan pembatas. Karakteristiknya adalah adanya kendala tambahan yang tidak mempengaruhi DPF sehingga penyelesaian optimalnya tidak berubah. Perhatikan Contoh 3.6 berikut ini.

Contoh 3.6.

Min $z = 2x + 5y$

$$\text{h.m} \quad \begin{aligned} x + y &\le 1 \\ 2x + 2y &\le 5 \\ x &\le 3 \\ x &\le 5 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$



Gambar 19. Penyelesaian Contoh 3.6

Berdasarkan Gambar 3.8 di atas, terlihat bahwa DPFnya adalah daerah yang dibatasi segitiga OAB dengan titik ekstrim $O = (0,0), A = (0,1), B = (1,0),$. Nilai minimumnya 0 dengan penyelesaian optimalnya $O = (0,0)$. Perhatikan gambar, ada tidaknya fungsi kendala $2x + 2y = 5$ tidak mempengaruhi DPF. Oleh karena itu kasus ini disebut kelebihan pembatas.

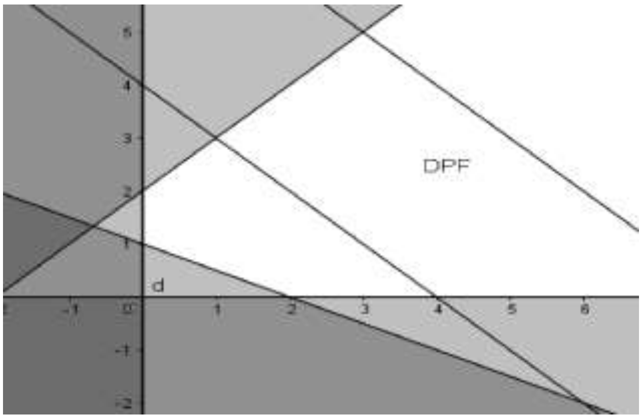
Kasus keempat adalah penyelesaian tidak terbatas. Kasus ini dibedakan menjadi 2 yaitu nilai Z yang tidak terbatas dan penyelesaian optimal yang tidak terbatas. Untuk nilai Z yang tidak terbatas, karakteristik nya adalah ketika kita menggunakan garis selidik maka garis tersebut tidak pernah bertemu dengan titik ekstrim. Ketika garis-garis selidik $ax + by = k_1, k_2, k_3, ...dst$ dibuat untuk menemukan penyelesaian optimal maka nilai k semakin membesar dan tidak pernah bertemu dengan titik ekstrim. Perhatikan Contoh 3.7 berikut ini.

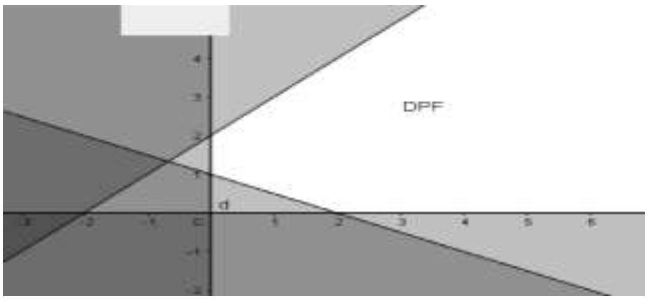
Contoh 3.7.

Maks $z = x + y$

$$\begin{aligned} & -x + y \leq 2 \\ \text{h.m} \quad & x + 2y \geq 2 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Perhatikan gambar DPF pada Gambar 3.9 di bawah ini. DPFnya terbuka. Koefisien fungsi tujuan positif. Berdasarkan Teorema 3.2 yaitu Teorema Eksistensi Penyelesaian Masalah Program Linear maka nilai maksimumnya tidak ada. Jika dicek menggunakan garis selidik, garis selidik tersebut tidak pernah bertemu dengan titik ekstrim. Nilai Z semakin membesar. Jadi Contoh 3.7 merupakan kasus penyelesaian tidak terbatas (dalam hal ini Z tidak terbatas).





Gambar 20. Kasus penyelesaian tidak terbatas (dalam hal ini Z tidak terbatas)

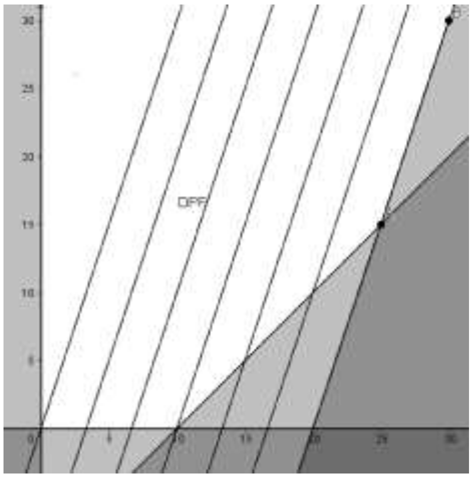
Penyelesaian tidak terbatas selanjutnya adalah penyelesaian optimal (PO) tidak terbatas. Perhatikan Contoh 3.8 berikut ini.

Contoh 3.8.

Maks $z = 30x - 10y$

$$\begin{array}{ll} & x - y \le 10 \\ \text{h.m} & 3x - y \le 60 \\ & x \ge 0 \\ & y \ge 0 \end{array}$$

Gambar DPF disajikan pada Gambar 3.10 sebagai berikut.



Gambar 21. DPF Contoh 3.8

Dengan menggunakan garis selidik, ternyata garis selidik berimpit dengan $3x - y \le 60$. Titik $A = (25,15)$ berkaitan dengan penyelesaian optimal. Nilai Z maksimumnya adalah $30.25 - 10.15 = 600$ Titik $B = (30,30)$ berada pada garis $3x - y = 60$. Sehingga titik B berkaitan dengan penyelesaian optimal. Nilai Z maksimumnya adalah $30.25 - 10.15 = 600$. Apakah masih ada titik lain yang memberikan Z = 600? Ya ternyata ada. Titik lain tersebut berada pada sinar garis AB yaitu $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid 3x - y = 60, x \ge 25\}$. Titik pada sinar garis AB tersebut sangat banyak dan memberikan nilai Z yang sama yaitu 600. Oleh karena itu, Contoh 3.8 ini merupakan kasus penyelesaian tidak terbatas yaitu PO yang tidak terbatas.

D. Rangkuman

1. Untuk mendapatkan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel dilakukan prosedur sebagai berikut.
   (1) Tambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
   (2) Kurangkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
   (3) Kalikan atau bagi kedua ruas dengan bilangan positif yang sama.
   (4) Jika mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik.
2. Menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel dengan cara sebagai berikut.
   (1) Ubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan. Gambar garis l yang persamaannya $ax + by = c$ (putus-putus jika tanda $<$ atau $>$, tidak putus-putus jika tandanya $\leq$ atau $\geq$).
   (2) Ambil titik uji P yang tidak berada pada garis l dan cek apakah memenuhi pertidaksamaan. Jika titik *P*memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) yang memuat P. Jika titik *P* tidak memenuhi pertidaksamaan maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan titik-titik pada paruh bidang (*half-plane*) di sisi lain garis l.
   (3) Arsir daerah yang tidak memenuhi pertidaksamaan.
   (4) Himpunan penyelesaiannya dalam gambar berupa daerah sehingga disebut dengan daerah penyelesaian.
3. Ada beberapa carayang sering digunakan untuk menentukan solusi dari suatu SPL, seperti **metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan metode gabungan (eliminasi dan substitusi)**.
4. Jika matriks berikut berukuran sedemikian sehingga operasi-operasinya dapat dilakukan dan $A = (a_{ij})$ bilangan real maka aturan berikut berlaku.
   (1) A + B = B + A — sifat komutatif untuk penjumlahan
   (2) A + (B + C) = (A + B) + C — sifat asosiatif untuk penjumlahan

(3) A(BC) = (AB)C sifat asosiatif untuk perkalian
(4) A(B + C) = AB + AC sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan
(5) (B + C)A = BA + CA sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan
(6) $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$
(7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
(8) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
(9) $\alpha(BC) = (\alpha B)C = \beta)A = B(\alpha C)$

5. Program linear merupakan bagian dari Operation Research yang mempelajari masalah optimum. Langkah-langkah penyelesaian masalah program linear yaitu:
   (1) ubah masalah verbal menjadi model matematika
   (2) tentukan daerah penyelesaian
   (3) tentukan nilai fungsi tujuan di titik-titik ekstrem daerah penyelesaian
   (4) tentukan nilai optimum fungsi tujuan.

Pembelajaran 3. Logika Matematika

A. Kompetensi

1. Mendeskripsikan kalimat, pernyataan, dan tabel kebenaran
2. Menyelesaikan masalah menggunakan nilai kebenaran logika matematika
3. Mendeskripsikan aljabar proposisi dan argumen
4. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti bersyarat dan bukti tak langsung

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengidentifikasi pernyataan kalimat terbuka
2. Menentukan negasi pernyataan tunggal
3. Mengidentifikasi pernyataan majemuk
4. Menentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk
5. Menarik kesimpulan dari pernyataan berkuantor, tautologi dan kontradiksi
6. Mengidentifikasi hukum-hukum aljabar proposisi
7. Menguji keabsahan argumen berdasarkan logika matematika
8. Membangun argumen dengan metode inferensi
9. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti bersyarat
10. Membuktikan suatu argumen dengan aturan bukti tak langsung

C. Uraian Materi

1. Kalimat, Pernyataan, dan Tabel Kebenaran

Kalimat dibedakan menjadi 2 macam, yaitu : (1) kalimat deklaratif/pernyataan, dan (2) kalimat non deklaratif

Kalimat Deklaratif (pernyataan)

Kalimat deklaratif atau pernyataan adalah kalimat berarti yuang mempunyai nilai logika BENAR atau SALAH, tetapi tidak kedua-duanya dalam saat bersamaan. Kalimat pernyataan dikatakan bernilai logik BENAR apabila pernyataan itu berlaku secara umum dan atau sesuai dengan keadaan sebenarnya (faktual).

Benar atau salahnya suatu pernyataan dapat ditunjukkan dengan bukti. Apabila untuk menentukan benar atau salahnya suatu pernyataan harus mengadakan observasi (penyelidikan) maka pernyataan yang demikian disebut faktual.

Contoh :

Jakarta adalah Ibukota Negara dan kota metropolitan. (benar secara faktual)

Daffa ingin naik kelas. (benar secara umum)

Nugraha sedang sakit panas. (benar secara faktual)

Kalimat non-Dekalratif (bukan pernyataan)

Kalimat non-deklaratif adalah kalimat berarti yang tidak atau belum mempunyai nilai logik. Biasanya berupa kalimat tanya, kalimat perintah atau kalimat terbuka.

Contoh :

Kemana saja kamu selama ini ? (tidak mempunyai nilai logik, karena kalimat tanya)

Hapuslah air matamu ! (tidak mempunyai nilai logik, karena kalimat perintah)

$x^2 – 25 = 0$ (tidak mempunyai nilai logik, karena kalimat terbuka)

Kalimat Terbuka dan Tertutup

Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel. Jika variabelnya diganti oleh suatu konstanta, kalimat tersebut akan berubah menjadi suatu pernyataan. Konstanta yang menggantikan variabel suatu kalimat terbuka menjadi pernyataan yang benar disebut penyelesaian dari kalimat terbuka itu.

Contoh :

8x – 70 = - 6. Jika x diganti dengan 2 maka menjadi pernyataan yang salah, tetapi jika x diganti dengan 8 maka menjadi pernyataan yang benar.

Pada kalimat di atas 8 disebut **penyelesaian**. Sebuah kalimat matematika yang tidak memuat variabel dan dapat dinyatakan benar/salah tetapi tidak kedua-duanya disebut **kalimat tertutup**.

Contoh :

7 + 5 = 12 (benar)

14 – 12 = 20 (salah)

Kalimat Majemuk

1. Konjungsi

Jika dua pernyataan digabungkan dengan kata “dan” maka pernyataan itu disebut konjungsi. Penulisan kata gabung “dan “ pada konjungsi dilambangkan dengan tanda : “ ∍ “. Sedangkan tabel kebenaran pernyataan-pernyataan konjungsi disampaikan dalam bentuk tabel sebagai berikut :

P	Q	P ∍ Q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

atau

P	Q	P ∍ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Pernyataan majemuk P ∍ Q dikatakan benar jika kedua-duanya benar dalam hal lain dikatakan salah.

Contoh :

a. P : Singa adalah binatang buas. (B)
   Q : Singa binatang pamakan daging. (B)
   P ∧ Q : Singa adalah binatang buas dan pemakan daging. (B)

b. P : 9 adalah bilangan ganjil. (B)
   Q : 9 adalah bilangan prima. (S)
   P ∧ Q : 9 adalah bilangan ganjil dan prima. (S)

c. P : 7 adalah bilangan genap. (S)
   Q : 7 adalah bilangan khayal. (S)
   P ∧ Q : 7 adalah bilangan genap dan khayal. (S)

2. Disjungsi

Jika dua pernyataan digabungkan dengan kata “ atau “ maka pernyataan majemuk ini disebut disjungsi. Disjungsi mempunyai dua arti yang berbeda yaitu: (1) Disjungsi Inklusif dan (2) Disjungsi Eksklusif

Disjungsi inklusif mempunyai makna benar jika paling sedikit satu dari pernyataan bernilai benar.

Lambang disjungsi inklusif adalah “ (“ dan tabel kebenarannya sebagai berikut.

P	Q	P (Q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

atau

P	Q	P (Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pernyatan majemuk P ∨ Q dikatakan salah jika kedua-duanya salah, dalam hal lain dikatakan benar.

Contoh :

a. P : Tono membeli baju
   Q : Tono membeli celana
   $P \vee Q$: Tono membei baju atau celana

Keterangan :

Pernyataan di atas mempunyai makna sebagai berikut :

1. Tono membeli baju tetapi Tono tidak membeli celana
2. Tono membeli celana tetapi Tono tidak membeli baju
3. Tono membeli baju sekaligus juga membeli celana

Dijungsi eksklusif mempunyai makna benar jika paling sedikit satu pernyataan benar tetapi tidak kedua-duanya.

Disjungsi eksklusif mempunyai lambang " $\veebar$ " dan tabel kebenaran dari disjungsi eksklusif sebagai berikut.

P	Q	P (Q
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

atau

P	Q	P (Q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pernyataan majemuk $P \veebar Q$ dikatakan bernilai salah jika P dan Q bernilai sama, dalam hal lain dikatakan benar.

Contoh :

a. P : Ibu sedang pergi ke pasar.
   Q : Ibu sedang memasak.
   $P \vee Q$: Ibu sedang pergi ke pasar sedang memasak.

Keterangan :

Pernyataan di atas mempunyai makna :

1. Ibu sedang pergi ke pasar tetapi tidak sedang memasak.
2. Ibu tidak sedang pergi ke pasar tetapi sedang memasak.
3. Tidak mungkin ibu sedang pergi ke pasar sekaligus sedang memasak begitu pula sebaliknya.

3. Implikasi (kondisional)

Pernyataan majemuk yang berbentuk “ jika P maka Q “ disebut implikasi atau kondisional. Lambang penulisan implikasi sebagai berikut :

“ P □ Q “ atau “ P ® Q“

Pernyataan majemuk “ P → Q “ akan dikatakan bernilai salah jika P benar dan Q salah, dalam hal lain dikatakan benar.

Tabel kebenaran dari implikasi sebagai berikut :

P	Q	P □ Q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

atau

P	Q	P □ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Contoh :

a. P : Achmad siswa yang rajin. (B)
 Q : Achmad naik kelas. (B)
 P→Q : Jika Achmad siswa yang rajin maka Achmad naik kelas. (B)

b. P : 7 x 2 = 72 (S)
 Q : 6 + 4 = 10 (B)
 P→Q : Jika 7 x 2 = 72 maka 6 + 4 = 10 (B).

c. P : - 6 adalah bilangan bulat. (B)
 Q : - 6 adalah bilangan irrasional (S)
 P→Q : Jika - 6 adalah bilangan bulat maka – 6 adalah Bilangan irrasional. (S)

4. Bi-Implikasi

Pernyataan majemuk yang berbentuk “ P jika dan hanya jika Q “ disebut Bi-implikasi. Penulisan Bi-implikasi menggunakan lambang “ P □ Q atau P ™ Q “. Lambang di atas bermakna :

1. P jika dan hanya jika Q.
2. P ekuivalen Q.
3. P syarat yang perlu dan cukup untuk Q.

Jika P dan Q dua pernyataan yang tersusun sebagai “P □ Q “ maka tabel kebenarannya sebagai berikut :

P	Q	P Q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

atau

P	Q	P Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pernyataan P ↔ Q akan dikatakan bernilai benar jika P dan Q jika P dan Q bernilai sama, dalam hal lain dikatakan salah .

Contoh :

a. P : Gajah binatang berkaki empat. (B)
Q : Gajah bertelinga lebar. (B)
P↔Q : Gajah binatang berkaki empat jika dan hanya jika gajah binatang bertelinga lebar

b. P : 8 + 2 = 10 (B)
Q : - 16 – 4 = - 12 (S)
P↔Q : 8 + 2 = 10 jika dan hanya jika – 16 – 4 = - 12 (S)

c. P : 7 < - 20 (S)
Q : 20 adalah bilangan ganjil. (S)
P↔Q : 7 < - 20 jika dan hanya jika 20 adalah bilangan ganjil. (S)

5. Negasi

Negasi atau ingkaran adalah penolakan dari pernyataan yang ada. Jika sebuah pernyataan bernilai salah maka negasinya bernilai benar dan jika pernyataan bernilai benar maka negasinya bernilai salah. Penulisan lambang negasi P adalah " ~ P ". Untuk menentukan ingkaran atau negasi dari sebuah pernyataan maka penulisan ditambah kata " tidak , tidak benar bahwa, atau bukan" di depan pernyataan.

Tabel kebenaran dari negasi adalah sebagai berikut :

P	~ P
B	S
S	B

P	~ P
1	0
0	1

Contoh :

a. P : 2 adalah bilangan prima. (B)
   ~ P : 2 adalah bukan bilangan prima. (S)

b. P : Ali anak orang kaya. (B)
   ~ P : Ali bukan anak orang kaya. (S)

Negasi dari pernyataan ekuivalen dengan disjungsi dari masing-masing konjungsinya dan begitu sebaliknya. Bentuk kesetaraan di atas disebut juga dengan dalil De-Morgan, yaitu :

$$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

Selain dalil De-Morgan masih banyak kesetaraan yang lain, misalnya :

$$\sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$$

$$\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$$

Contoh :

a. 8 adalah bilangan genap <u>dan</u> bulat.
   Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu :
   1. <u>Tidak benar bahwa</u> 8 adalah bilangan genap <u>dan</u> bulat.
   2. 8 adalah <u>bukan</u> bilangan genap <u>atau</u> <u>bukan</u> bilangan bulat.

b. Kita dapat berbelanja di Toko Laris <u>atau</u> di Matahari Dept. Store.
   Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu :
   1. <u>Tidak benar bahwa</u> kita dapat berbelanja di Toko Laris <u>atau</u> di Matahari Dept. Store.
   2. Kita dapat berbelanja <u>tidak</u> di Toko Laris <u>dan</u> <u>tidak</u> di Matahari Dept. Store.

2. Tautologi dan Kontradiksi

Kuator

a. Kuantor Universal

Kata-kata yang biasa digunakan dalam kuantor universal adalah “semua”, “setiap”, “untuk semua” atau “untuk setiap”. Kuantor universal dilambangkan dengan . Berikut adalah contoh kuantor universal.

(1) Semua kuadrat bilangan real merupakan bilangan real positif atau nol $\forall x \in R, x^2 \geq 0$

(2) Untuk setiap segitiga siku-siku ABC dengan sisi a, b, dan sisi miring c, berlaku a^2 + b² = c^2.

b. Kuantor Eksistensial

Pernyataan matematika yang dilengkapi dengan kata-kata “terdapat”, “ada”, “sekurang-kurangnya satu”, atau “beberapa” merupakan pernyataan berkuantor eksistensial. Kuantor eksistensial dilambangkan dengan . Berikut adalah contoh kuantor eksistensial.

1) Terdapat beberapa pasangan bilangan bulat m dan n sehingga $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$ $\exists m, n \in Z \ni \frac{4}{m}+\frac{2}{n}$

2) Ada mahasiswa UNNES yang memiliki usaha sendiri.

c. Negasi Pernyataan Kuantor

Dua buah pernyataan (proposisi) dikatakan **ekivalen (berekivalensi logis)** jika kedua pernyataan itu memiliki nilai kebenaran yang sama. Perhatikan dua pernyataan berikut.

p: Guru pahlawan bangsa

q: Tidak benar bahwa guru bukan pahlawan bangsa

Kedua pernyataan ini akan memiliki nilai kebenaran yang sama, tidak peduli bagaimana nlai kebenaran dari pernyataan semula. Dengan demikian, $\boldsymbol{p}$ **ekivalen dengan** $\boldsymbol{q}$ dan dapat ditulis $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$.

Berdasarkan definisi di atas, sifat-sifat pernyataan-pernyataan yang ekivalen (berekivalensi logis) adalah:

a. $p \equiv q$

b. Jika $p \equiv q$ maka $q \equiv p$

c. Jika $p \equiv q$ dan $q \equiv r$ maka $p \equiv r$

Sifat pertama berarti bahwa setiap pernyataan selalu ekivalen (memiliki nilai kebenaran yang sama) dengan pernyataan itu sendiri. Sifat kedua berarti bahwa jika suatu pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan lain, maka berlaku sebaliknya. Sedangkan sifat ketiga berarti bahwa jika pernyataan pertama mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan kedua dan pernyataan kedua mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan ketiga maka nilai kebenaran pernyataan pertama dan ketiga akan sama.

Teorema DeMorgan

Misalkan $p(x)$ adalah sebuah fungsi proposisional pada A, maka

(i) $\sim(\forall x \in A)p(x) \equiv (\exists x \in A)\sim p(x)$

(ii) $\sim(\exists x \in A)p(x) \equiv (\forall x \in A)\sim p(x)$

Untuk memperjelas contoh di atas, disajikan contoh sebagai berikut.

(i) “Tidak benar bahwa semua bilangan prima adalah bilangan ganjil.” Menurut Teorema DeMorgan pernyataan di atas dapat dibuat pernyataan lain yang ekuivalen, yaitu “Terdapat bilangan prima yang bukan bilangan ganjil.”

(ii) "Tidak benar bahwa ada segitiga yang jumlah sudutnya lebih dari sama dengan $180°$."

Menurut Teorema DeMorgan pernyataan di atas dapat dibuat pernyataan lain yang ekuivalen, yaitu "Semua segitiga, jumlah sudutnya kurang dari $180°$."

3. Tautologi dan Kontradiksi

Pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar untuk setiap substitusi pernyataan tunggalnya dinamakan tautologi. Dengan kata lain, tautologi merupakan pernyataan yang selalu bernilai benar dalam kondisi apapun. Tautologi digunakan sebagai dasar dalam pengambilan keputusan atau pembuktian matematis.

Perhatikan contoh-contoh tautologi berikut ini.

Contoh 1.

"Ani mempunyai sepeda atau Ani tidak mempunyai sepeda. Pernyataan majemuk ini bernilai *B* (benar), untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya.

Misalnya,

a = "Ani mempunyai sepeda", bernilai *B*.

$\sim a$ = "Ani tidak mempunyai sepeda", bernilai *S*. Maka, $a \vee \sim a$ bernilai *B*.

Begitu pula apabila "a" bernilai S maka "$\sim a$" bernilai *B* sehingga $a \vee \sim a$ bernilai *B*

Pernyataan majemuk yang selalu bernilai *B* untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya seperti itu disebut tautologi.

Kontradiksi

Jika tautologi adalah pernyataan yang selalu bernilai benar, maka sebaliknya kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah untuk setiap substitusi nilai kebenaran pernyataan tunggalnya.

Contoh 1.

Tentukan nilai kebenaran pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim p$ dengan tabel kebenaran.

Penyelesaian:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
B	B	B	S	S
B	S	S	S	S
S	B	S	B	S
S	S	S	B	S

Dari tabel kebenaran di atas terlihat bahwa $(p \wedge q) \wedge \sim p$ selalu bernilai *S*, sehingga pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim p$ disebut kontradiksi.

D. Rangkuman

1. Pernyataan
   - Pernyataan adalah suatu kalimat yang sudah jelas nilai kebenarannya (benar saja atau salah saja).
   - kalimat terbuka adalah kalimat yang belum jelas nilai kebenarannya.
   - pernyataan disebut juga kalimat tertutup/ proposisi.
   - simbol: p, q, r, ….
2. Operasi pada Pernyataan

P	q	~p	~q	p ∍ q	p (q	p ® q	p ™ q
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	S	S
S	B	B	S	S	B	B	S
S	S	B	B	S	S	B	B

3. Tautologi, Kontradiksi, dan kontingensi
   - *Tautologi* adalah pernyataan majemuk yang kompenen pembentuk kebenarannya bernilai **benar semua**.
   - *Kontradiksi* adalah pernyataan majemuk yang kompenen pembentuk kebenarannya bernilai **salah semua**.
   - *kontingensi* adalah pernyataan majemuk yang kompenen pembentuk kebenarannya terdapat nilai **benar dan salah**.

4. Ekuivalensi Pernyataan majemuk

- p ∍ q α q ∍ p
- p (q α q (p
- p ∍ (q ∍ r) α (p ∍ q) ∍ r
- p ((q (r) α (p (q) (r
- p ∍ (q (r) α (p ∍ q) ((p ∍ r)
- p ((q ∍ r) α (p (q) ∍ (p (r)
- p ® q α~p (q
- p ™ q α (p ® q) ∍ (q ® p)

5. Negasi pernyataan majemuk (*De Morgan*):
   - ~ (~p) α p
   - ~ (p ∍ q) α~p (~q
   - ~ (p (q) α~p ∍~q
   - ~ (p ® q) α p ∍~q
   - ~ (p ™ q) α (p ∍~q) ((q ∍~P)
6. Kalimat Kuantor
   - Kuantor Universal

     x, p(x) dibaca: untuk setiap/ semua x berlaku p(x)
   - Kuantor Eksistensial

     x, p(x) dibaca: ada/ beberapa x berlaku p(x)

   Negasi kalimat kuantor:
   - ~ x, p(x) α x, ~p(x)
   - ~ x, p(x) α x, ~p(x)
7. Konvers, Invers, dan Kontraposisi dari Implikasi

   Dari Implikasi p ® q dapat dibuat implikasi lain, yaitu:
   - q ® p : Konvers
   - ~p ®~q : Invers
   - ~q ®~p : Kontraposisi

   dengan ekuivalensi:
   - p ® q α~q ®~p
   - q ® p α~p ®~q
8. Penarikan Kesimpulan

   Terdapat tiga prinsip penarikan kesimpulan:

1) Modus ponens	2) Modus tollens	3) Silogisme
P1 : p ® q P2 : p K : 4 q	P1 : p ® q P2 : ~q K : 4~p	P1 : p ® q P2 : q ® r K : 4 p ® r

Pembelajaran 4. Geometri dan Trigonometri

A. Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geomteri datar
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geometri ruang
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan geometri transformasi
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan trigonometri

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep segitiga
2. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep segiempat
3. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep lingkaran
4. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan kedudukan titik, garis dan bidang dalam ruang
5. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan jarak dalam ruang
6. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan sudut dalam ruang
7. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep pencerminan
8. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep translasi
9. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep rotasi
10. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep dilatasi
11. Menyelesaikan masalah sudut pada bidang datar dengan menggunakan identitas trigonometri
12. Menyelesaiakn masalah menggunakan konsep inver fungsi trigonometri
13. Menyelesaikan masalah trigonometri denganmmenggunakan rumus jumlah dan selisih fungsi trigonometri

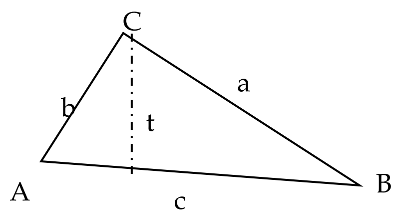
C. Uraian Materi

1. Geometri Datar

a. Rumus Keliling dan Luas Bidang Segitiga

$K = a + b + c$

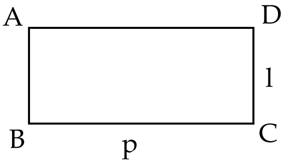
$L = ½ . \text{alas} . \text{tinggi}$



$L = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$

dimana $s = \frac{a+b+c}{2}$

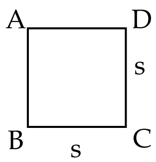
Persegi panjang



K = 2 . (p + l)

L = p . l

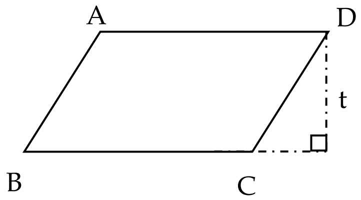
Bujur sangkar



K = 4. s

L = s . s = s^2

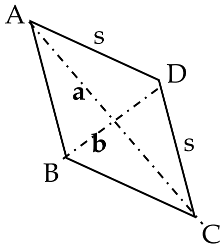
Jajar genjang



K = 2. (a + b)

L = a. t

Belah ketupat

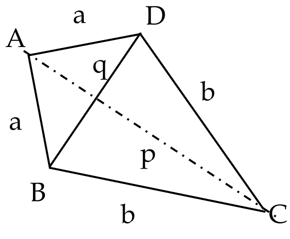


K = 4 . s

L = ½ . a . b

dimana : a dan b diagonal

Layang-layang



K = 2. (a + b)

L = ½ . p . q

dimana :

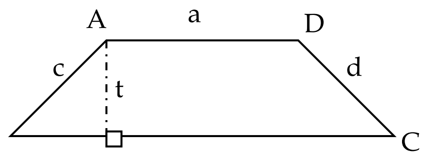
q = BD

p = AC

Trapesium

$K = a + b + c + d$

$L = \frac{1}{2} . (a + b) . t$



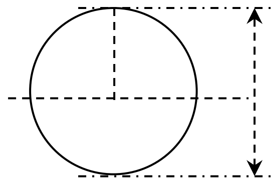
Lingkaran

$K = 2.\pi . r$

$K = \pi . d$ ….. dimana $2.r = d$

$L = \pi . r^2$

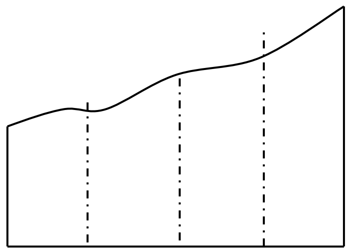
$L = \frac{1}{4} .\pi . d^2$ …… dimana $r = \frac{1}{2} d$



b. Taksiran Luas Daerah Bidang tak Beraturan

Aturan Trapesoida

Bangun daerah bidang tak beraturan dibagi menjadi beberapa bagian yang sama, disebut pilah. Satu bidang pilah ABQP luasnya mendekati trapesium dengan sisi sejajar O_1 dan O_2 serta jaraknya d.



Luas pilah ABQP ≈ $d\left(\frac{O_1 + O_2}{2}\right)$

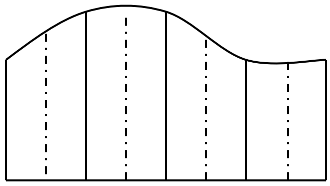
Luas pilah BCRQ ≈ $d\left(\frac{O_2 + O_3}{2}\right)$

Demikian seterusnya sehingga luas total merupakan jumlah masing-masing pilah, maka luas total dirumuskan :

Luas AETP ≈ $d\left(\frac{O_1 + O_5}{2} + (O_2 + O_3 + O_4)\right)$

Aturan Mid-Ordinat

Seperti halnya aturan trapesoida, pada aturan ini diambil tengah-tengah dari masing-masing ordinat.



Luas pilah ABHG = d . m_1

Luas pilah BCIH = d . m_2

Demikian seterusnya sehingga luas total merupakan jumlah masing-masing pilah, maka luas total dirumuskan :

Luas AEKG = d . ($m_1 + m_2 + m_3 + m_4$)

Aturan Simpson

Aturan ini biasanya dipergunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva f(x) dengan sumbu-x pada interval tertentu [a , b].

Aturan Simpson dituliskan dalam rumus :

$$A = \frac{d}{3}.\{(F + L) + 4.E + 2R\}$$

dimana :

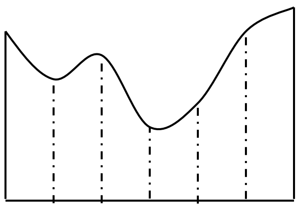
A	: Luas daerah
d	: Lebar pilah
F	: Ordinat pertama
L	: Ordinat terakhir
E	: Jumlah ordinat bernomor genap
R	: Jumlah ordinat bernomor ganjil

Contoh :

Hitunglah luas daerah di samping ini menggunakan aturan :

a. aturan trapesoida

b. aturan mid-ordinat



c. aturan Simpson

Jawab :

a. aturan trapesoida

$$L \approx d\left(\frac{O_1 + O_5}{2} + (O_2 + O_3 + O_4)\right) \approx 2\left\{\frac{8+9}{2} + (6+7+4+5+8)\right\}$$

$$\approx 2.\{8,5 + 30\} \approx 2 \;.\; 38,5$$

$\approx$ 77 satuan luas.

b. aturan mid-ordinat

$$L \approx d \;.\; (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6)$$

$$L \approx 2\left(\frac{8+6}{2} + \frac{6+7}{2} + \frac{7+4}{2} + \frac{4+5}{2} + \frac{5+8}{2} + \frac{8+9}{2}\right)$$

$$\approx 2.\;(7 + 6,5 + 5,5 + 4,5 + 6,5 + 8,5) \approx 2.\;(38,5)$$

$\approx$ 77 satuan luas

c. aturan Simpson

$$L \approx \frac{d}{3}.\{(F + L) + 4.E + 2R\} \approx \frac{2}{3}.\{(8+9) + 4.(6+4+8) + 2.(7+5)\}$$

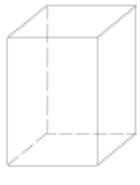
$$\approx \frac{2}{3}.(17 + 72 + 24) \approx \frac{2}{3}.113 \approx \frac{226}{3}$$

$\approx$ 75,3 satuan luas

2. Geometri Ruang

Kubus

Kubus adalah bangun ruang yang dibatasi enam buah sisi persegi, yang kongruen. Perhatikan gambar 1 berikut ini.



Keterangan :

- AB = BC = CG disebut rusuk (s)
- ABCD, ABFE, BCGF disebut sisi

Jadi bangun kubus mempunyai :

- 12 rusuk yang sama panjang
- 6 buah sisi yang berbentuk persegi
- Tiap sisi luasnya = $\mathbf{s^2}$ satuan luas.
- Total luas permukaan kubus = $\mathbf{6 \cdot s^2}$
- Diagonal sisi = $\mathbf{s\sqrt{2}}$ (contoh diagonal BG)
- Diagonal ruang = $\mathbf{s\sqrt{3}}$ (contoh diagonal DF)

Balok

dibatasi oleh enam buah sisi yang
kan gambar 2 berikut ini.

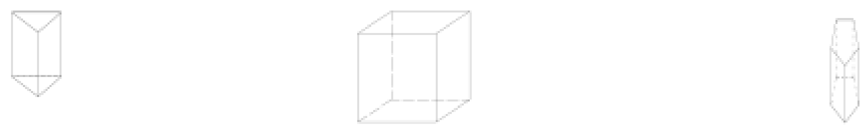
Balok ABCD.EFGH dengan rusuk panjang p, lebar l dan tinggi t.

Balok mempunyai :

- 12 rusuk (AB, CD, EF, GH, BC, FG, dll)
- 6 buah sisi yang berbentuk persegi panjang.
- Luas Permukaaan = L = 2(p.l + p.t + l.t)
- Volume = V = p.l.t

Prisma

Prisma adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang **segi n yang beraturan** dan sejajar (bidang alas dan bidang atas) dan beberapa bidang lain (bidang sisi tegak) yang potong-memotong menurut garis-garis sejajar. Perhatikan gambar 3 di bawah ini.

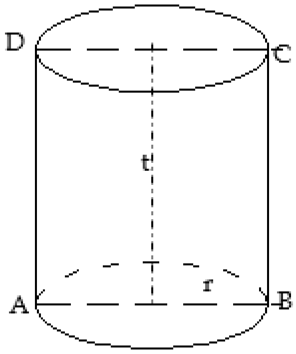


Keterangan :

- Bidang ABC (i), bidang ABCD (ii) dan bidang ABCDE disebut bidang alas.
- Bidang DEF (i), bidang EFGH (ii) dan bidang FGHIJ disebut bidang atas.
- Bidang ABED (i), bidang ABFE (ii), bidang ABGF dan bidang lain yang sesuai bidang tersebut disebut bidang sisi tegak.
- Garis-garis AB, BC, dan lainnya disebut rusuk.
- Luas Permukaan = 2. L alas + L selimut prisma
- Volume = L alas x t

Tabung

Tabung adalah prisma tegak beraturan yang bidang alasnya berupa segi n beraturan dengan n tak terhingga (berupa lingkaran). Perhatikan gambar 4 berikut ini.



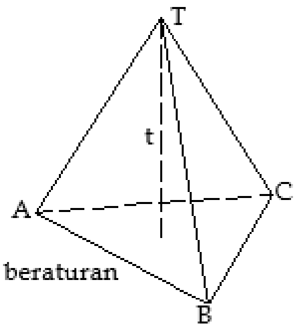
gambar 4

Keterangan :

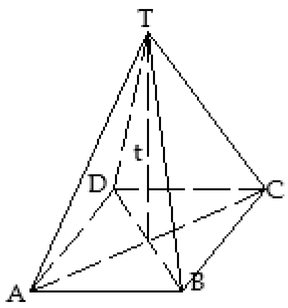
- AC dan BD disebut garis pelukis.
- AB dan CD disebut diameter bidang alas dan bidang alas
- Jari-jari lingkaran alas = r
- Tinggi tabung = t
- Luas permukaan = $2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r\ (r + t)$
- Volume = $\pi r^2 t$

Limas Beraturan

Limas adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah segi n beraturan (bidang alas) dan bidang sisi tegak yang berbentuk segitiga sama kaki yang alasnya sisi-sisi n, sedangkan puncaknya berimpit. Perhatikan gambar 5 berikut ini.



prisma segi 3 beraturan



prisma segi 4 beraturan

gambar 5

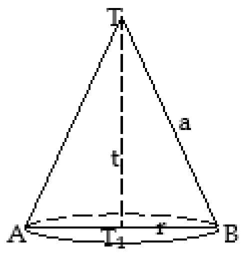
Keterangan :

- ABC dan ABCD disebut bidang alas.
- TAB,TBC dan bidang yang sesuai disebut sisi tegak.
- Luas permukaan = L alas + L selimut limas

- Volume $= \frac{1}{3} L\, alas\ x\ t$

Kerucut

Kerucut adalah limas beraturan yang bidang alasnya segi n beraturan dengan n tak terhingga (berbentuk lingkaran). Kerucut mempunyai 2 sisi yaitu alas dan bidang lengkung. Perhatikan gambar 6 berikut ini.



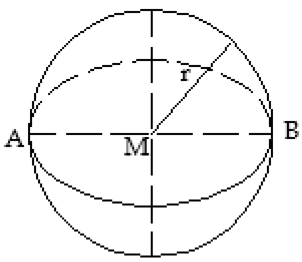
gambar 6

Keterangan :

- TT_1 : tinggi kerucut (t)
- AB : diameter alas dengan jari-jari r
- AT dan BT : garis pelukis/apotema (a) dengan hubungan : $\mathbf{a^2 = t^2 + r^2}$
- Luas permukaan = πr (r + s) dengan: $s = \sqrt{r^2 + t^2}$
- $Volume = \frac{1}{3} \pi r^2 x t$

Bola

Bola adalah bangun ruang yang dibatasi oleh bidang lengkung saja, yang terjadi jika bangun setengah lingkaran diputar pada garis tengahnya (lihat gambar 7).



gambar 7

Keterangan :

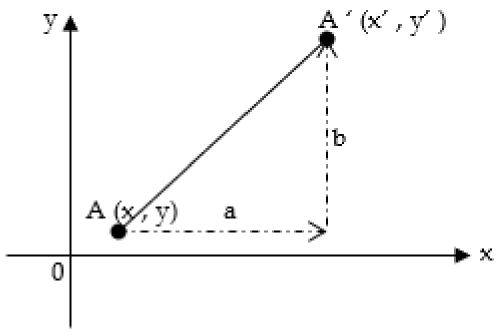
- M : titik pusat bola
- AB : d = diameter bola
- r : jari-jari bola
- Luas permukaan = $4\pi r^2$
- $Volume = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. Transformasi Geometri

Transformasi dapat dipandang sebagai pemetaan dari himpunan titik ke himpunan titik. Biasanya titik yang dipetakan adalah (x,y), titik hasil pemetaan/bayangannya adalah (x',y'). Beberapa jenis transformasi yang akan kita pelajari antara lain :

a. Translasi (penggeseran)

Suatu transformasi disebut translasi/penggeseran jika setiap titik dipindahkan sepanjang ruas garis tertentu, dengan pengertian sepanjang ruas sejajar sumbu x (a) dan sepanjang ruas sejajar sumbu y (b).



Jika suatu titik A (x , y) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan titik A' (x',y'), dengan x' = x + a dan y' = y + b maka titik A' (x+a , y+b)

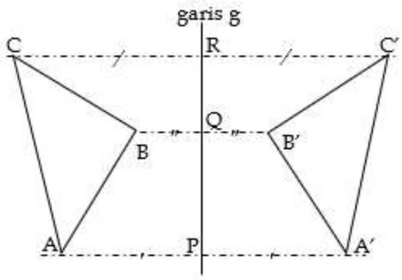
Contoh : Jika titik A (6,7) ditranslasi T $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kemudian ditranslasi T $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka titik hasil translasi adalah …

Jawab : A' = (6 +2 – 3 , 7 + 3 + 4) maka hasil translasi adalah A' (5,14)

b. Refleksi (pencerminan)

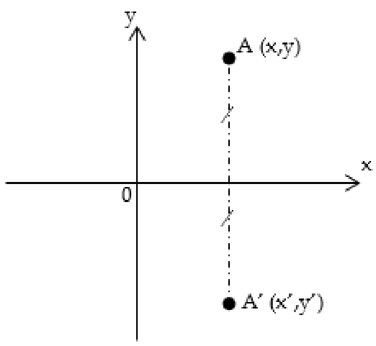
Suatu refleksi ditentukan oleh suatu garis yang dijadikan sebagai sumbu pencerminan. Segitiga ABC dicerminkan terhadap garis g menghasilkan segitiga A'B'C', maka :

AP = PA'
BQ = QB'
CR = RC'



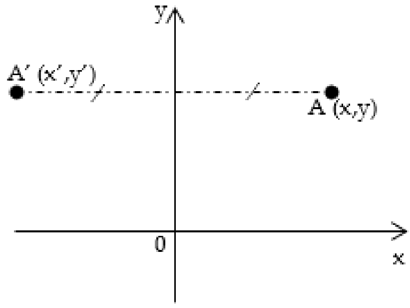
b.1. Pencerminan terhadap sumbu x

Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu x dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **sumbu x** adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



b.2. Pencerminan terhadap sumbu y

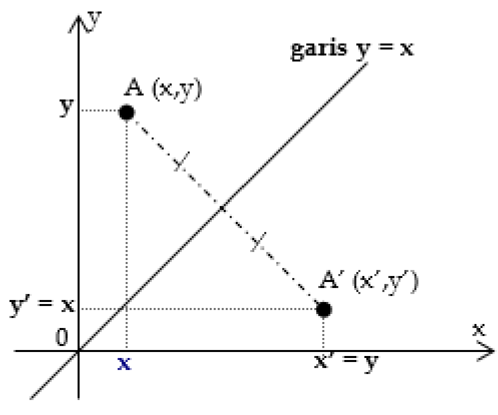
Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **sumbu y** adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b.3. Pencerminan terhadap garis y = x

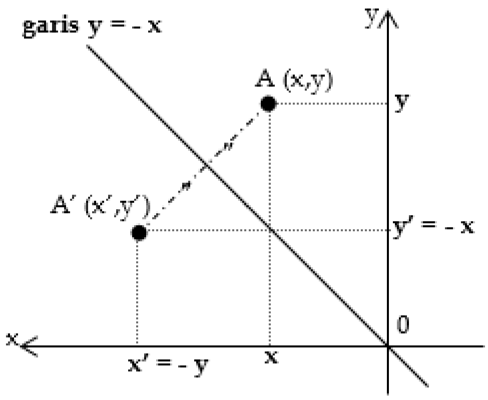
Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **garis y = x** adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b.4. Pencerminan terhadap garis y = - x

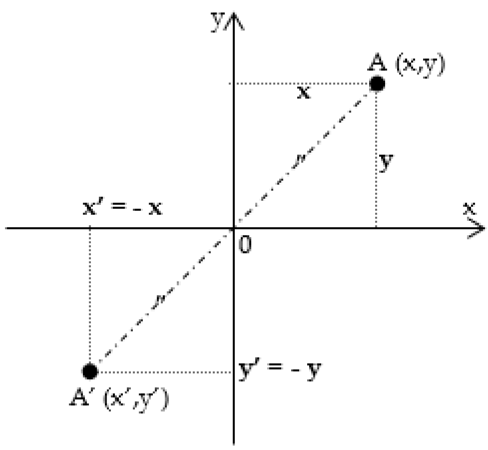
Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan thd **garis y = - x** adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b.5. Pencerminan terhadap titik asal O (0,0)

Jika titik A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu y dan bayangannya didapatkan A' (x',y'), maka diperoleh perumusan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.



Apabila ditampilkan dalam hitungan matriks sebagai berikut : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jadi matriks pencerminan terhadap **titik O** adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Contoh : Diketahui segitiga PQR dengan titik sudut P (-3,2), Q (-5,5) dan R (-1,4). Tentukan bayangan segitiga PQR akibat :

a. pencerminan terhadap sumbu x

b. pencerminan terhadap sumbu y

Jawab : Terhadap sumbu x Terhadap sumbu y

P' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ P' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Q' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ Q' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

R' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ R' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

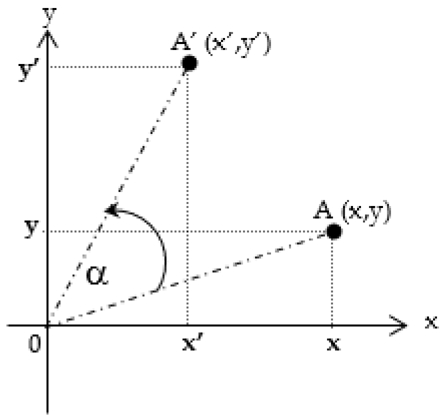
Jadi titik-titik pencerminannya adalah :

a. terhadap sumbu x : P' (-3,-2), Q' (-5,-5), dan R' (-4,-4)

b. terhadap sumbu y : P' (3,2), Q' (5,5) dan R' (1,4)

c. Rotasi

Suatu rotasi ditentukan oleh pusat rotasi dan besar sudut rotasi. Rotasi dengan pusat O (0,0) dan besar sudut α dituliskan dalam R [O, α].



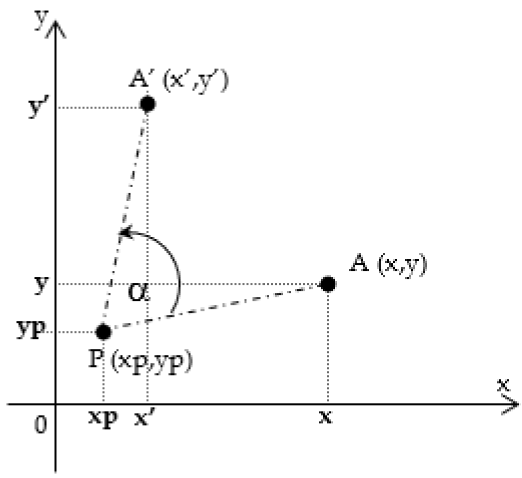
Titik A (x,y) dirotasikan dengan rotasi R [O, α] menghasilkan titik A' (x',y'). Dengan memperhatikan gambar disamping diperoleh hubungan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dengan demikian didapatkan :

x ' = x . cos α - y . sin α

y ' = x . sin α + y. cos α

Titik A (x,y) dirotasikan dengan rotasi R [P, α] menghasilkan titik A' (x',y'), dimana berpusat di titik P (xp,yp).



$$\begin{pmatrix} x'-xp \\ y'-yp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-xp \\ y-yp \end{pmatrix}$$

Dengan demikian didapatkan :

x ‘ = {(x - xp) . cos α - (y - yp) . sin α } – xp

y ’ = {(x – xp). sin α + (y – yp) . cos α} - yp

Contoh : Tentukan bayangan titik A (4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat O dan dengan titik pusat P (1,2) !

Jawab : Rotasi dengan titik pusat O

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rotasi dengan titik pusat P (1,2)

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \end{pmatrix}$$

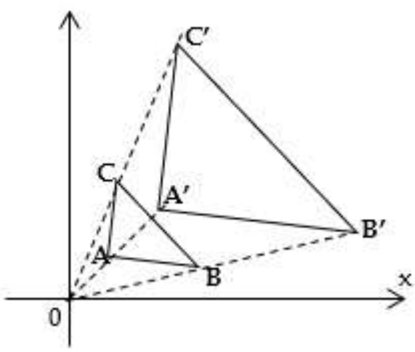
$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ 3+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik A (4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat O adalah A’ (-5,4), sedangkan bayangan titik A (4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat P (1,2) adalah A’ (-2,5).

d. Dilatasi (perkalian)

Suatu dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor skala (faktor perkalian). Dilatasi dengan pusat O (0,0) dan faktor skala k , dirumuskan dengan [O , k].



Segitiga ABC didilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala k menghasilkan A’B’C’ hal ini didapatkan hubungan :

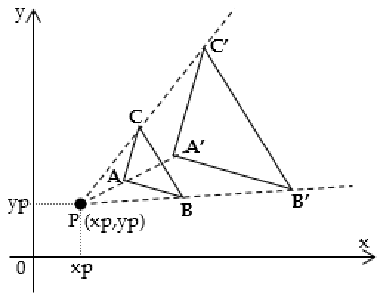
x ‘ = k . x

y ‘ = k . y

Dengan menggunakan matriks bayangan titik yang di-dilatasi dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika titik A (x,y) didilatasikan dengan titik pusat P (xp , yp) dan faktor skala k, menghasilkan titik A ‘ (x ’,y ’) seperti gambar di bawah ini



diperoleh hubungan:

$$\begin{pmatrix} x'-xp \\ y'-yp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-xp \\ y-yp \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x'-xp \\ y'-yp \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x-xp \\ y-yp \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.(x-xp)+xp \\ k.(y-yp)+yp \end{pmatrix}$$

Contoh : Tentukan bayangan titik A (6,8) karena dilatasi [O , 3] dan karena dilatasi [P, 4] dimana titik pusat P (2,1) !

Jawab : Dilatasi [O , 3]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Dilatasi [P , 4]

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 6-2 \\ 8-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4+2 \\ 4.7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 29 \end{pmatrix}$$

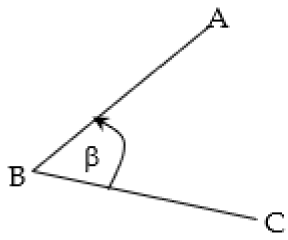
Jadi titik bayangan hasil dilatasi adalah :

A’ (18,24) dan A’ (18,29)

4. Ukuran sudut

Pengertian Sudut

Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua buah ruas garis dan satu titik



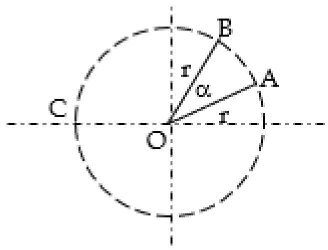
Dari gambar di samping disebut sudut B atau β atau sudut ABC (∠ ABC) dibatasi oleh dua buah ruas garis BA dan BC serta satu titik (sudut) B.

Macam-macam Satuan Sudut

Pada umumnya ukuran satuan sudut tergantung pada kepentingannya. Barang atau alat apa yang sedang dipergunakan, maka satuan sudut tertentu pula yang akan dipergunakan. Ada tiga (3) satuan sudut yang biasa digunakan saat ini, yaitu :

a. Satuan Derajat (….°)

Ukuran sudut satu putaran penuh adalah 360°, maka misalkan besar α adalah 1° dan apabila panjang busur AB = $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran, dengan kata lain satu derajat adalah $\frac{1}{360}$ putaran.



Ukuran sudut yang lebih kecil adalah menit (′) dan detik (″).
Hubungan antara derajat, menit dan detik adalah :

$1° = 60′$

$1′ = 60\ ″$

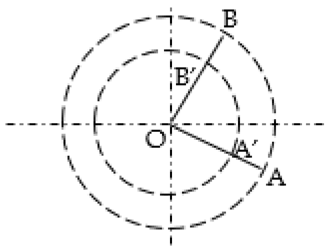
maka untuk $1° = 60′ = 3600\ ″$

b. Satuan Radian (rad)

Ukuran Radian disingkat rad.

Apabila busur AB sama dengan jari-jari lingkaran, maka dikatakan bahwa besar sudut tersebut satu radian.

Perhatikan gambar di bawah ini



$$\frac{\frown AB}{OA} = \frac{\frown A'B'}{OA'}$$

Perbandingan $\frac{\frown AB}{OA} = \frac{r}{r} = 1$, menunjukkan ukuran sudut AOB.

Nilai bilangan itu disebut ukuran radian.

Busur ABC adalah bangun setengah lingkaran π r , sehingga :

$\frac{BusurABC}{OA} = \frac{\pi.r}{r} = \pi \text{ rad}$, maka ∠ AOC = π rad.

c. Satuan Centisimal/gon/grade

Ukuran ini dilambangkan dengan …..g atau grad. (gradien)

Besar sudut disebut 1 gon apabila panjang busur AB = $\frac{1}{400}$ keliling lingkaran, maka :

1 gon = $\frac{1}{400}$ 2. □rad = $\frac{1}{200}$□ rad.

Konversi Satuan Sudut

Hubungan : 1 putaran = 360° = 2.π rad = 400 g

Maka : π rad = 180 ° = 200 g

Berdasarkan hubungan di atas maka akan didapatkan konversi sebagai berikut :

a. Mengubah radian ke derajat (konversi 1)

   π rad = 180°

   1 rad = $\frac{180^0}{\pi}$, apabila π = 3,14 maka diperoleh :

   1 rad = 57° 17′ 44″

b. Mengubah radian ke gon (konversi 2)

   π rad = 200 g

   1 rad = $\frac{200}{\pi}$g , apabila π = 3,14 maka diperoleh :

   1 rad = 63,69 g

c. Mengubah derajat ke radian (konversi 3)

   180° = π rad

   1° = $\frac{\pi}{180}$rad , apabila π = 3,14 maka diperoleh :

   1° = 0,017 rad

d. Mengubah gon ke radian (konversi 4)

   200 g = π rad

   1 g = $\frac{\pi}{200}$rad , apabila π = 3,14 maka diperoleh :

   1 g = 0,016 rad

e. Mengubah derajat ke gon (konversi 5)

   180° = 200 g

   1° = $\frac{200}{180}$g

   1° = 1,11 g

f. Mengubah gon ke derajat (konversi 6)

   200 g = 180°

   1 g = $\frac{180^0}{200}$

   1 g = 0,9 °

Contoh :

1. 36,56° konversikan ke bentuk satuan derajat, menit dan detik !

Jawab : 36,56° = 36° + 0,56′

$= 36° + \frac{56}{100} \times 60'$

$= 36° + 33{,}6' \quad = 36° + 33' + 0{,}6'$

$= 36° + 33' + \frac{6}{10} \times 60'' = 36° + 33' + 36''$

Jadi : 36,56° = 36° 33′ 36″

2. Konversikan 21,9 g ke bentuk satuan derajat !

Jawab : 21,9 g = 21,9 x 0,9

= 15,71°

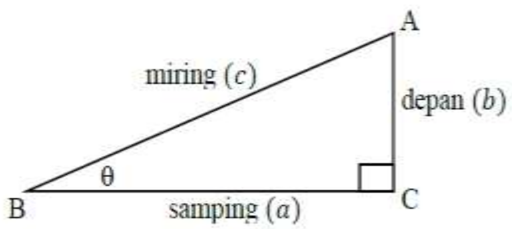
3. Konverikan 5 rad ke bentuk satuan gon !

Jawab : 5 rad = 5 x 63,69 g

= 318,45 g

5. Fungsi trigonometri

Coba saudara ingat apa arti sudut siku-siku, sudut lancip, dan sudut tumpul. Dengan mengamati bangun-bangun yang ada di sekitar kita, dapatkah saudara menemukan bangun yang berbentuk segitiga siku-siku? Gambarlah bangun segitiga siku-siku di kertas dan sebut ketiga titik sudutnya dengan huruf A, B dan C dan sudut siku-siku berada di C. Masih ingatkah saudara pengertian sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan dan cosecan suatu sudut lancip dalam segitiga siku-siku ABC (misalnya sin$\angle BAC$, cos$\angle BCA$)? Perhatikan Gambar 1.1.



$$\sin\theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} \Leftrightarrow \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} \Leftrightarrow \tan B = \frac{b}{a}$$

Gambar 1.1. Pendefinisian nilai sin, cos, dan tan suatu sudut dalam sebuah segitiga

Dari Gambar 1.1. diperoleh juga nilai-nilai trigonometri untuk sudut A yaitu

$$Sin\ A = \frac{a}{c}, Cos\ A = \frac{b}{c}, dan\ Tan\ A = \frac{a}{b}$$

Dapat dituliskan dengan

$$a = c.Sin\ A = c..Cos\ B = b.Tan\ A \quad dan$$

$$b = c.Sin\ B = c.Cos\ A = a.\tan B$$

Definisi untuk nilai-nilai fungsi trigonometri lainnya diberikan pada Definisi 1.1.

Definisi 1.1

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Berdasarkan Gambar 1.1 dan Definisi 1.1, diperoleh

$$c = a\ \csc A = a\sec B = b\csc B = b\sec A.$$

Dari perolehan di atas, jika A dan B sudut segitiga dengan 0°<A,<90° dan A+B=90° maka sin$A$=cos$B$, cos$A$=sin$B$, tan$A$=cot$B$, dan cot$A$=tan$B$. Karena ABC merupakan segitiga siku-siku maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$. Dari sini diperoleh

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Untuk selanjutnya $(\sin A)^2$ dituliskan dengan $\sin^2 A$. Fungsi trigonometri lainnya juga menyesuaikan. Untuk 0°<A<90° berlaku

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \tag{1.1}$$

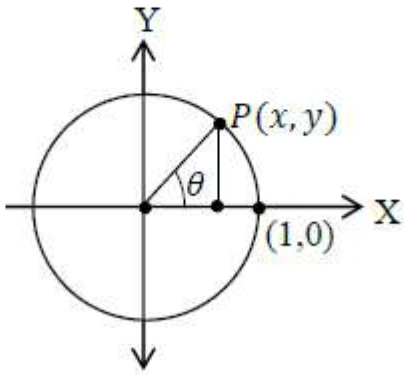
Persamaan (1.1) apabila kedua ruas dibagi dengan $\cos^2 A$ maka diperoleh

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A \quad atau \ \sec^2 A - \tan^2 A = 1 \tag{1.2}$$

Persamaan (1.1) apabila kedua ruas dibagi dengan $\sin^2 A$ maka diperoleh

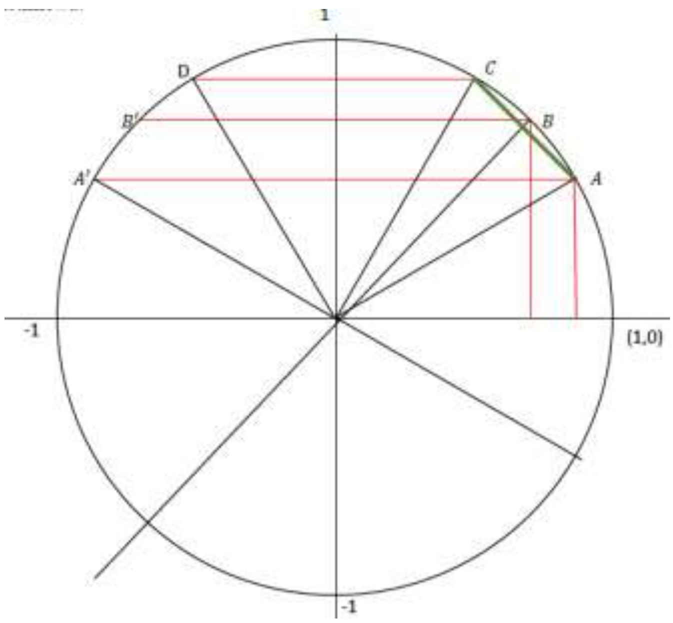
$$1 + \cot^2 A + 1 = \csc^2 A \ \ atau \ \csc^2 A - \cot^2 A = 1 \tag{1.3}$$

Proses pembelajaran selanjutnya akan digunakan lingkaran satuan untuk menentukan nilai-nilai dari fungsi trigonometri.
Perhatikan Gambar 1.2.



Gambar 1.2 Titik P berpadanan dengan sudut θ

Titik P(x,y) adalah suatu titik pada lingkaran satuan yang berpadanan dengan sudut θ. Dari Gambar 1.2, diperoleh sinθ=y, cosθ=x, dan $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Selanjutnya akan dihitung nilai trigonometri dari beberapa sudut istimewa.



Gambar 1.3 Titik-titik berpadanan dengan sudut-sudut istimewa.

Untuk $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

Dari Gambar 1.3 diperoleh titik yang berkenaan dengan sudut ini adalah titik $A(x_A, y_A)$.

Jelas $y_A = \frac{1}{2}$, jadi

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow x_A^2 + \frac{1}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow x_A^2 - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_A - \frac{1}{2}\sqrt{3})(x_A + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_A = \frac{1}{2}\sqrt{3} \ atau \ x_A = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Karena untuk $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$, titik $A(x_A, y_A)$ berada pada lingkaran di daerah kuadran I maka berakibat $x_A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Jadi $A\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Jadi diperoleh $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Untuk $\theta = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

Dari Gambar 1.3 diperoleh titik yang berkenaan dengan sudut ini adalah titik $C(x_C, y_C)$.

Jelas titik C adalah hasil pencerminan titik A oleh garis $y = x$.

Jadi $x_C = y_A \ dan \ y_C = x_A$

Jadi $C(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$

Dengan demikian diperoleh $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\ dan\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Coba ambil sebarang θ dengan $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Kemudian tarik garis lurus dari titik pusat lingkaran ke lingkaran sebut dengan titik P. Lakukan pencerminan titik tersebut terhadap garis y=x dan sebut bayangannya dengan P'. Akan diperoleh bahwa $x_{P'}=y_P$ dan $y_{P'}=x_P$. Dari proses tersebut diperoleh:

$o\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ berlaku :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

Untuk $\theta=120^0=90^0+30^0$

Dari Gambar 1.3 diperoleh titik yang berkenaan dengan sudut ini adalah titik $D(x_P,y_P)$.

Jelas titik D adalah hasil pencerminan titik C oleh Sumbu Y atau garis $x=0$

Jadi $x_D=-x_C$ dan $y_D=-y_C$ sehingga $D(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$ dan diperoleh

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ dan\ \sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Coba ambil sebarang θ dengan $o\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Kemudian tarik garis lurus dari titik pusat lingkaran ke lingkaran sebut dengan titik Q. Lakukan pencerminan titik tersebut terhadap sumbu Y atau garis x=0 dan sebut bayangannya dengan Q'. Akan diperoleh bahwa $x_{Q'}=-x_Q$ dan $y_{Q'}=-y_Q$

Dari proses tersebut diperoleh

Untuk $o \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ berlaku :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

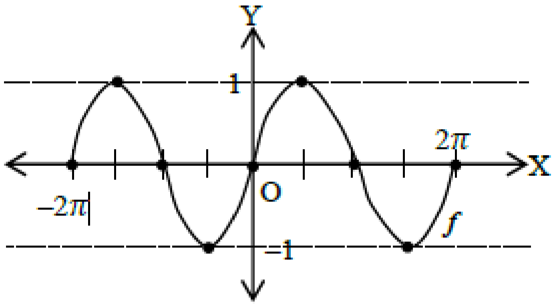
Darilangkah-langkah di atas,diperoleh nilai fungsi trigonometri sudut istimewa seperti tabelberikut ini.

Tabel 5. nilai-nilai fungsi trigonometri untuk beberapa sudut istimewa

θ	$x = \cos\theta$	$y = \sin\theta$	$\frac{y}{x} = \tan\theta$
0	1	0	0
30^0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45^0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
90^0	0	1	TA
120^0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
135^0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150^0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180^0	1	0	0

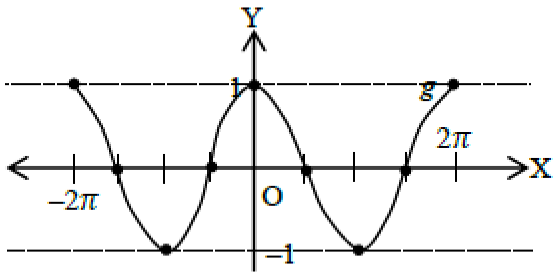
6. Identifikasi grafik fungsi trigonometri

   Grafik fungsi sinus diberikan pada Gambar 1.4.



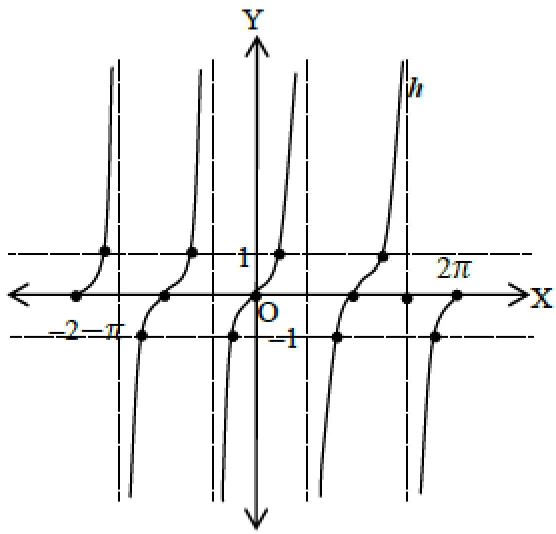
Gambar 1.4 Grafik $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}$ dengan $f(x)=\sin x$

Grafik fungsi cosinus diberikan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5 Grafik $g:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}$ dengan $g(x)=\cos x$

Grafik fungsi tangen diberikan pada Gambar 1.6.



7. Aturan sinus, aturan cosinus

Pada suatu segitiga ABC, dapat ditunjukkan bahwa luas daerah ABC dinotasikan dengan $[ABC]$ bernilai $[ABC]=\frac{ab\sin C}{2}$. Dengan menggunakan sudut pandang lainnya diperoleh:

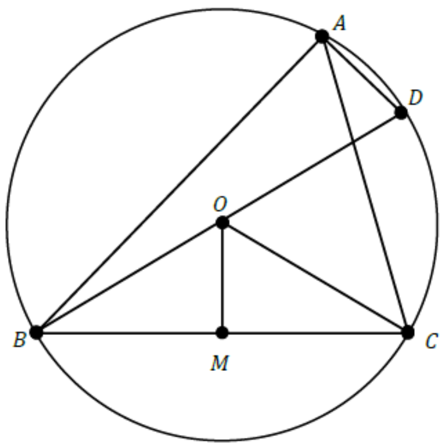
$$[ABC]=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}$$

Apabila dikalikan dengan $\frac{2}{abc}$ maka diperoleh aturan sinus seperti pada Teorema 1.2.

Teorema 1.2 (Aturan Sinus)

Pada suatu segitiga ABC berlaku

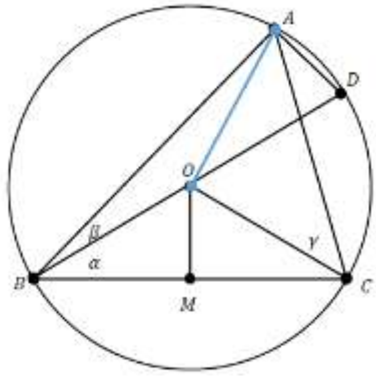
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ atau $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dengan a panjang sisi di depan sudut A, b panjang sisi di depan sudut B dan c panjang sisi di depan sudut C. Gambar 1.7 berikut akan kita gunakan untuk membuktikan perluasan aturan sinus tersebut.



Gambar 1.7 Segitiga dan lingkaran luar segitiga

Dimisalkan lingkaran luar segitiga ABC mempunyai pusat di O dan panjang jari-jari R. Jelas segitiga BOC merupakan segitiga sama kaki. Jadi $\angle OBC = \angle OCB$. Tarik garis dari titik A ke titik O.

Perhatikan Gambar 1.8.



Dari Gambar 1.8, terlihat bahwa segitiga AOB dan segitiga AOC juga merupakan segitiga sama kaki. Jadi $\angle OAB = \angle OBA$ dan $\angle OAC = \angle OCA$. Sebut $\angle OBC = \alpha$, $\angle OBA = \beta$, dan $\angle OCA = \gamma$. Jelas bahwa $\angle BOC = 180^0 - 2\alpha$ dan $\angle BAC = \beta + \gamma$.

Jadi $\angle BAC = 180^0 - [(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)]$

$\Leftrightarrow \beta + \gamma = 180^0 - 2\alpha - \beta - \gamma$

$\Leftrightarrow 2(\beta + \gamma) = 180^0 - 2\alpha$

$\Leftrightarrow 2\angle BAC = \angle BOC$

Titik M merupakan titik tengah pada garis BC dan $OM \perp BC$. Karena segitiga OBC merupakan segitiga semi kaki maka $|OB|=|OC|=R$ dan diperoleh juga bahwa $\angle BOM = \angle COM = \angle CAB$ sehingga pada segitiga siku-siku BMO berlaku $|BM|=|OB|\sin A$.

Diperoleh $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{[BC]}{\sin A} = \dfrac{2[BM]}{\sin A} = \dfrac{2[OB]\sin A}{\sin A} = 2|OB| = 2R$

Berdasarkan Teorema 1.2 dapat diperoleh perluasan dari aturan sinus yang diberikan pada Teorema 1.3.

Teorema 1.3 (Perluasan Aturan Sinus)

Pada suatu segitiga ABC berlaku

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

dengan R merupakan jari-jari lingkaran luar segitiga.

Contoh 1.2.

Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Tentukan perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC.

Penyelesaian:

Dipunyai $\angle C$=3$\angle A$ dan $\angle B$=2$\angle A$.

Karena $\angle A$+$\angle B$+$\angle C$=180° maka diperoleh $\angle A$=30°, $\angle B$=60°, dan $\angle C$=90°.

Jelas ABsin∠C=BCsin∠A⇔$ABBC$=sin∠Csin∠A=sin90°sin30°=21.

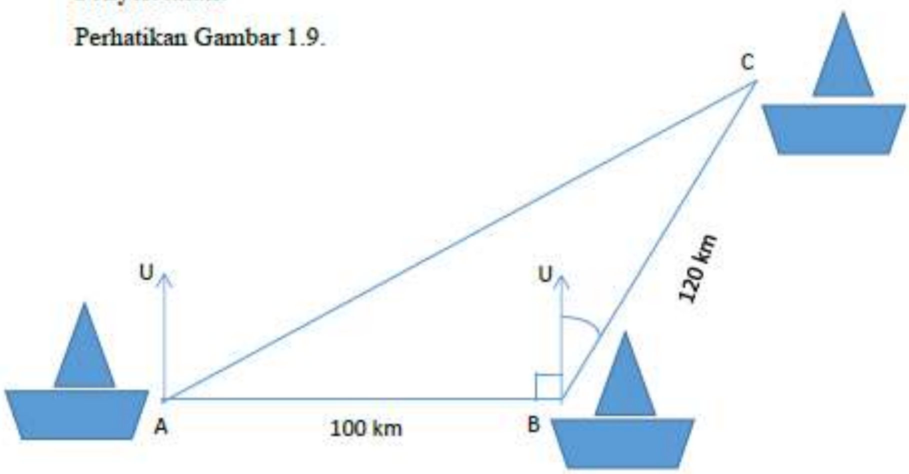
Jadi AB:BC=2:1.

Contoh 1.3.

Sebuah perahu berlayar ke arah timur sejauh 100 km, kemudian memutar pada arah 30° sejauh 120 km hingga berhenti. Jarak perahu dari tempat mula mula berlayar ke tempat pemberhentian adalah ....

Penyelesaian:

Perhatikan Gambar 1.9.



Gambar 1.9 Sketsa pergerakan perahu

Misalkan titik A adalah titik mula-mula dan titik C merupakan titik pemberhentian perahu. Jelas bahwa $\angle ABC$= 90° + 30° = 120°.

Diketahui bahwa panjang AB=100 km dan panjang BC=120 km.

Dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh

AC2=AB2+ BC2−2·AB·BC·cos$\angle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\angle ABC$$

$$AC^2 = 100^2 + 120^2 - 2.100.120.\cos 120^0$$

$$AC^2 = 10.000 + 14.400 - 2.100.120.(\frac{1}{2}) = 24.400 + 12.000 = 36.400$$

$$Jadi\ AC = 20\sqrt{91}$$

Jadi, jarak kapal dari tempat mula-mula ke tempat pemberhentian adalah $20\sqrt{91}$ km.

8. Rumus jumlah dan selisih fungsi trigonometri

Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut.

(1) Cos (A+B) = Cos A. Cos B – Sin A . Sin B

(2) Cos (A-B) = Cos A. Cos B + Sin A . Sin B

(3) Sin (A+B) = Sin A. Cos B + Cos A . Sin B

(4) Sin (A-B) = Sin A. Cos B - Cos A . Sin B

(5) Tan (A+B) = $\frac{Tan A + Tan\ B}{1 - Tan A.Tan B}$

(6) Tan (A-B) = $\frac{Tan A - Tan B}{1 + Tan A.Tan B}$

Contoh Soal :

Diketahui : Sin A = $\frac{3}{5}$ untuk A sudut lancip

Cos B = - $\frac{12}{13}$ untuk B sudut lancip

Tentukan : a. Sin (A + B)

b. Cos (B – A)

c. Tan (A – B)

Jawab :

a. Sin (A+B) = Sin A . Cos B + Cos A . Sin B

$= \frac{3}{5} . (-\frac{12}{13}) + \frac{4}{5} . \frac{5}{13}$

$= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65}$

$= -\frac{16}{65}$

b. Cos (B-A) = Cos B . Cos A + Sin B . Sin A

$= -\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$

$= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65}$

$= -\frac{33}{65}$

c. Tan (A-B) = $\frac{TanA - TanB}{1 + TanA.TanB}$

$= \frac{3/4 - (-5/12)}{1 + 3/4.(-5/12)}$

$= \frac{3/4 + 5/12}{1 - 15/48} = \frac{36/48 + 20/48}{\frac{48}{48} - \frac{15}{48}}$

$= \frac{56/48}{33/48}$

$= \frac{56}{33}$

Rumus trigonometri rangkap

a. Sin 2 A = 2 Sin A . Cos A

b. Cos 2 A = Cos^2 A – 1

= 2 Cos^2 A – 1

= 1 – 2 Sin^2 A

c. Tan 2 A = $\frac{2.TanA}{1 - Tan^2 A}$

Contoh :

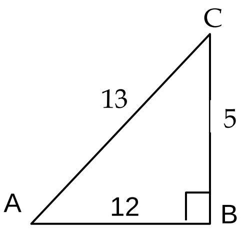
Diketahui Cos A = $\frac{12}{13}$ untuk A sudut lancip.

Tentukan : a. Sin 2 A

b. Cos 2 A

c. Tan 2 A

Jawab :



Cos A = $\frac{12}{13}$

Sin A = $\frac{5}{13}$

Tan A = 5/12

a. Sin 2 A $= 2 \text{ Sin A . Cos A}$

$= 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13}$

$= \frac{120}{169}$

c. Tan 2 A $= \frac{2 \text{ Tan A}}{1 - \text{Tan}^2 \text{ A}} = \frac{2 \cdot 5/12}{1 - (\frac{5}{12})^2}$

$= \frac{\frac{10}{12}}{\frac{144}{144} - \frac{25}{144}} = \frac{10/12}{\frac{119}{144}}$

$= \frac{10}{12} \times \frac{144}{119} = \frac{120}{119}$

b. Cos 2 A $= 1 - 2 \text{ Sin}^2 \text{ A}$

$= 1 - 2 (\frac{5}{13})^2$

$= 1 - 2 \frac{25}{169}$

$= \frac{169 - 50}{169}$

$= \frac{119}{169}$

Rumus perkalian Sinus dan Cosinus

a. 2 Sin A . Cos B = Sin (A+B) + sin (A-B)

b. 2 Cos A . Sin B = Sin (A+B) – Sin (A-B)

c. 2 Cos A . Cos B = Cos (A+B) + Cos (A-B)

d. $-2 \text{ Sin } A \cdot \text{Sin } B = \text{Cos }(A+B) - \text{Cos }(A-B)$

Contoh :

Nyatakan sebagai jumlah Sinus dan sederhanakan jika mungkin :

a. $\text{Cos } 75^0 \text{ Cos } 15^0$
b. $\text{Cos } 2x \cdot \text{Sin } x$

Jawab :

a. $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$

$\sin 75 \cos 15 = \frac{1}{2}\{\sin(75+15) + \sin(75-15)\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin 90^0 + \sin 60^0\}$

$= \frac{1}{2}\{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

b. $2 \cos A . \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$\cos A \sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$

$\cos 2x \sin x = \frac{1}{2}\{\sin(2x+x) - \sin(2x-x)\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin 3x - \sin x\}$

$= \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x$

Rumus penjumlahan dan pengurangan Sinus dan Cosinus

a. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) . \cos \frac{1}{2}(A-B)$
b. $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) . \sin \frac{1}{2}(A-B)$
c. $\cos A - \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) . \cos \frac{1}{2}(A-B)$
d. $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A+B) . \sin \frac{1}{2}(A-B)$

Contoh :

Hitunglah : a. $\cos 75^0 + \cos 15^0$ b. $\sin 75^0 + \sin 15^0$

Jawab :

a. $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$

$\cos 75^0 + \cos 15^0 = 2 \cos \frac{1}{2}(75+15) \cos \frac{1}{2}(75-15)$

$= 2 \cos \frac{1}{2}(90) . \cos \frac{1}{2}(60)$

$= 2 \text{ Cos } 45 \,.\, \text{Cos } 30$

$= 2 \,.\, ½ \sqrt{2} \,.\, ½ \sqrt{3} = ½ \sqrt{6}$

b. Sin A + Sin B = 2 Sin ½ (A+B) . Cos ½ (A-B)

Sin 75 + Sin 15 = 2 Sin ½ (75+15) . Cos ½ (75-15)

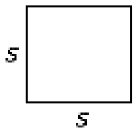
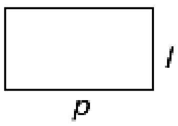
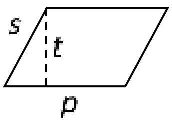
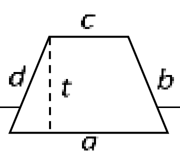
= 2 Sin ½ (90) . Cos ½ (60)

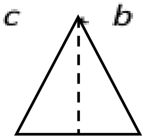
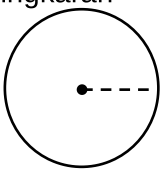
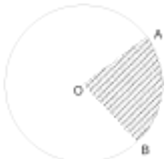
= 2 Sin 45 . Cos 30

$= 2 \,.\, ½ \sqrt{2} \,.\, ½ \sqrt{3} = ½ \sqrt{6}$

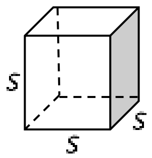
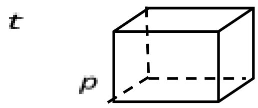
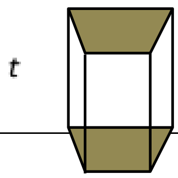
D. Rangkuman

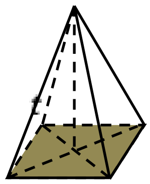
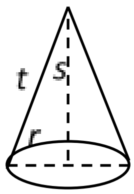
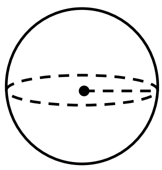
1. Bangun Datar

No	Bidang Datar	Keliling	Luas
1	Persegi 	K = 4s	$L = s^2$
2	Persegi Panjang 	K = 2(p + l)	L = p.l
3	Jajar Genjang 	K = 2(p + s)	L = p.t
4	Trapesium 	K = a + b + c + d	$L = \frac{(a+c).t}{2}$

5	Segitiga 	K = a + b + c	$L = \frac{1}{2} a.t$
6	Lingkaran 	K= 2πr	L = πr^2
7		Panjang busur Lingkaran $= \frac{\alpha}{360^0}$ x K $_{\text{lingkaran}}$	L juring Lingkaran $= \frac{\alpha}{360^0}$ x L $_{\text{lingkaran}}$

2. Bangun Ruang

No	Bangun Ruang	Luas Permukaan	Volume
1	Kubus 	L = 6s^2	V = s^3
2	Balok 	L = 2(p.l + p.t + l.t)	V = p.l.t
3	Prisma 	L = 2. L alas + L selimut prisma	V = L alas x t

4	Limas 	L = L alas + L selimut limas	V = $\frac{1}{3}$ L alas x t
5	Tabung *t* *r* - - -	L = 2.L alas + Luas selimut L = 2□r^2 + 2□rt = 2□r (r + t)	V = □r^2.t
6	Kerucut 	L = L alas + L selimut L = □r^2 + □rs L = □r (r + s) dengan: $s = \sqrt{r^2 + t^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 xt$
7	Bola 	L = 4πr^2	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. Transformasi Geometri

No	Transformasi	Pemetaan	Matriks Transformasi
1	Identitas	(x , y) → (x , y)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2	Translasi (translasi T $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$)	(x , y) → (x ', y ')	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu x	(x , y) → (x , -y)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap sumbu y	(x , y) → (-x , y)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap garis y = x	(x , y) → (y , x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
6	Pencerminan terhadap garis y = -x	(x , y) → (-y , -x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
7	Rotasi 90° terhadap O [R , 90°]	(x , y) → (-y , x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
8	Rotasi - 90° terhadap O [R , - 90°]	(x , y) → (y , -x)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
9	Dilatasi pusat O dan faktor skala k	(x , y) → (kx , ky)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

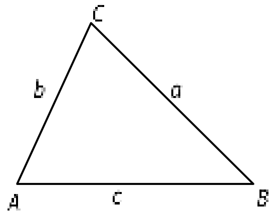
4. Trigonometri
   a. Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih 2 Sudut
      1) sin (α + ®) = sin α. cos ® + cos α. sin ®
      2) sin (α – ®) = sin α. cos ® – cos α. sin ®
      3) cos (α + ®) = cos α. cos ® – sin α. sin ®
      4) cos (α – ®) = cos α. cos ® + sin α. sin ®
      5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$
      6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$
   b. Rumus Trigonometri untuk sudut rangkap dan setengah sudut

1) sin 2α = 2 sin α. cos α	1) $\sin\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $=2\cos^2\alpha-1$ $=1-2\sin^2\alpha$	2) $\cos\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	3) $\tan\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ $=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

   c. Rumus Trigonometri untuk Perkalian sinus-kosinus
      1) 2 sin α. cos ® = sin (α + ®) + sin (α – ®)
      2) 2 cos α. sin ® = sin (α + ®) – sin (α – ®)
      3) 2 cos α. cos ® = cos (α + ®) + cos (α – ®)
      4) –2 sin α. sin ® = cos (α + ®) – cos (α – ®)

   d. Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Sinus-Kosinus
      1) $\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A-B)$
      2) $\sin A-\sin B=2\cos\frac{1}{2}(A+B).\sin\frac{1}{2}(A-B)$
      3) $\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A-B)$
      4) $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B).\sin\frac{1}{2}(A-B)$

e. Aturan Sinus dan Cosinus



Aturan sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan Kosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Jika Δ ABC di atas diketahui salah satu sudutnya dan diapit oleh 2 buah sisi segitiga yang diketahui panjangnya, maka rumus luas Δ ABC tersebut yaitu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}bc.\sin A \\ &= \frac{1}{2}ac.\sin B \\ &= \frac{1}{2}ab.\sin C \end{aligned}$$

Jika Δ ABC di atas diketahui ketiga panjang sisinya, maka luas Δ ABC tersebut ditentukan dengan rumus:

$L = \sqrt{s.(s-a)(s-b)(s-c)}$, dengan $s = \frac{1}{2}K\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Pembelajaran 5. Kalkulus

A. Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit sepihak
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit tak hingga
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kekontinuan limit
4. Menyelesaikan masalah menggunakan konsep turunan fungsi
5. Menyelesaikan masalah optimalisasi menggunakan konsep turunan fungsi
6. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan integral tertentu
7. Menggunakan konsep integral tertentu untuk menentukan luas bidang
8. Menggunakan konsep integral tertentu untuk menentukan luas benda putar

C. Uraian Materi

1. Limit Fungsi

Pengertian Limit Fungsi

$f(x) = L$ dimaknai bahwa kita dapat membuat $f(x)$ sangat dekat dengan L dengan cara mendekatkan nilai *x* terhadap *a.*

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar suatu titik (baik dari kiri maupun dari kanan titik itu), atau pada suatu titik tak hingga. Perhitungan nilai limit disekitar titik dapat dilakukan dengan pendekatan dari kiri (limit kiri) dan pendekatan dari kanan (limit kanan). Perhatikan contoh berikut:

Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, tentukan nilai $f(x)$ untuk x mendekati 3 jika dihitung dengan pendekatan dari kiri (limit kiri) dan pendekatan dari kanan (limit kanan).

Penyelesaian:

Pendekatan dari kiri (limit kiri) :

X	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,95	2,99	2,999	….	$\to 3$
$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	5,95	5,99	5,999	….	$\to 6$

Dari tabel tersebut terlihat bahwa jika x mendekati 3 (didekati dari kiri), maka nilai (x) mendekati 6,

Pendekatan dari kanan (limit kanan) :

x	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001	….	$\to 3$
$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$	6,5	6,4	6,3	6,2	6,1	6,01	6,001	6,0001	….	$\to 6$

Dari tabel tersebut terlihat bahwa jika x mendekati 3 (didekati dari kanan), maka f (x) mendekati 6,

Sehingga dapat ditulis bahwa : $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ = 6 (baik dari kiri maupun dari kanan)

Catatan :

a. Nilai limit ada jika nilai limit kiri sama dengan limit kanan.

b. Nilai limit tidak ada jika nilai limit kiri tidak sama dengan nilai limit kanan.

Limit fungsi di titik tak hingga (~)

Untuk memberikan gambaran perhatikan contoh berikut :

Diketahui fungsi $f(x)=\frac{1}{x}$, tentukan nilai fungsi f(x) untuk x mendekati tak hingga (x → ~).

Jawab :

x	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	….	→ ~
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	0,1	0,1	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	….	$\to 0$

Dari tabel terlihat bahwa jika x mendekati tak hingga, maka nilai f(x) mendekati 0, dan dapat ditulis : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Limit Fungsi Aljabar

Nilai limit sebuah fungsi dapat dihitung dengan cara subtitusi langsung terhadap variabelnya. Jika hasil perhitungan dengan subtitusi langsung didapat bilangan bentuk tak terdefinisikan, yaitu bentuk : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ atau $\infty - \infty$ perhitungan nilai limit harus dengan cara lain, misalnya pemfaktoran, penyederhanaan, dikalikan sekawannya dll.

Contoh:

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 2}{3x^2 + 4x - 5}$

Penyelesaian :

Penyelesaian dengan substitusi akan mendapatkan bilangan tidak tentu bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ selanjutnya dibagi dengan variable pangkat tertinggi, menjadi;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2-2}{x^2}}{\frac{3x^2+4x-5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{5 - \frac{2}{\infty^2}}{3 + \frac{4}{\infty} - \frac{5}{\infty^2}} = \frac{5-0}{3+0-0} = \frac{5}{3}$$

Sifat-sifat limit fungsi

Untuk menyelesaikan permasalahan limit dengan menggunakan beberapa sifat limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to a} k = k$ (dengan a dan k suatu konstanta)

b. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

c. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

d. $\lim_{x \to a} k.f(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$

e. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$ (jika f dan g fungsi dari x dan a = konstanta)

f. $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$ (jika f dan g fungsi dari x dan a = konstanta)

g. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ dengan $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

h. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$

i. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ dengan catatan $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$ untuk n bilangan genap

2. Turunan Fungsi

Laju perubahan rata-rata nilai fungsi *f*(x) atau derivatif fungsi atau biasa disebut turunan fungsi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika limit tersebut ada untuk x = a, dikatakan bahwa *f'*(*a*) ***diferensial atau turunan*** *f*(*x*) terhadap x untuk x = *a*.

Notasi untuk menyatakan turunan fungsi dari *y = f(x)* dapat menggunakan salah satu

berikut ini : *y'* atau $\frac{dy}{dx}$ atau *f '(x)* atau $\frac{df}{dx}$

Contoh:

Tentukan turunan fungsi *f(x)* = 3x² – 2x + 2 dengan menggunakan definisi turunan

Penyelesaian :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\{3(x+h)^2 - 2(x+h) + 2\} - \{3x^2 - 2x + 2\}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 2 - 3x^2 + 2x - 2}{h}$$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} 6x + 3h - 2$ dengan substitusi akan didapat

$f'(x) = 6x - 2$

Rumus Rumus Turunan Fungsi Aljabar

Dari rumus definisi di atas dapat kita temukan rumus-rumus turunan fungsi aljabar sebagai berikut :

1. jika $f(x) = k$, maka $f'(x) = 0$ untuk k = konstanta
2. Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$
3. Jika $f(x) = a.x^n$, maka $f'(x) = na.x^{n-1}$, untuk *a* dan *n* $\in$ real
4. Jika $f(x) = k.u$, maka $f'(x) = k.u'$ di mana *u* adalah fungsi dalam x
5. Jika $f(x) = u \pm v$, maka $f'(x) = u' \pm v'$, di mana *u* dan *v* masing-masing fungsi dalam x
6. Jika $f(x) = u.v$, maka $f'(x) = u'.v + u.v'$, di mana *u* dan *v* masing-masing fungsi dalam x
7. Jika $f(x) = \frac{u}{v}$, maka $f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$, di mana *u* dan *v* masing-masing fungsi dalam x

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini :

a. *f(x)* = 3.√x

b. *f(x)* = $3x^2$

Penyelesaian :

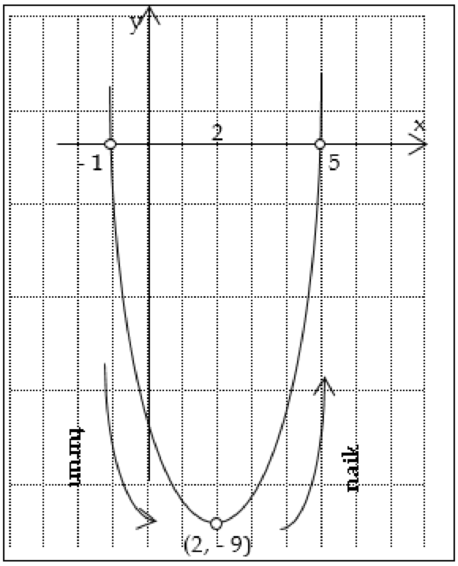
a. $f(x) = 3x^2$, maka berdasar sifat ke-3 $f'(x) = 6x$

b. $f(x)=3\sqrt{x}=3x^{\frac{1}{2}}$, maka berdasar sifat ke-3 $f'(x)=3.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{x}}$

Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Suatu fungsi f(x) yang terdefinisi dalam suatu interval dapat dikatakan fungsi naik atau turun dengan hasil turunan pertamanya, yaitu sebagai berikut :

a. Fungsi f(x) naik jika f '(x) > 0
b. Fungsi f(x) turun jika f '(x) < 0



Contoh 2 :

Diketahui fungsi f(x) = x^2 - 4x – 5 Tentukan interval x ketika fungsi f(x) naik dan fungsi f(x) turun.

Penyelesaian :

f(x) = x^2 – 4x – 5

f '(x) = 2x – 4

2x – 4 > 0

2x > 4

x > 2

fungsi *f(x)* naik pada interval x > 2

f '(x) = 2x – 4

2x – 4 < 0

$2x < 4$

$x < 2$

Fungsi *f(x)* turun pada interval $x < 2$

Perhatikan gambar di samping

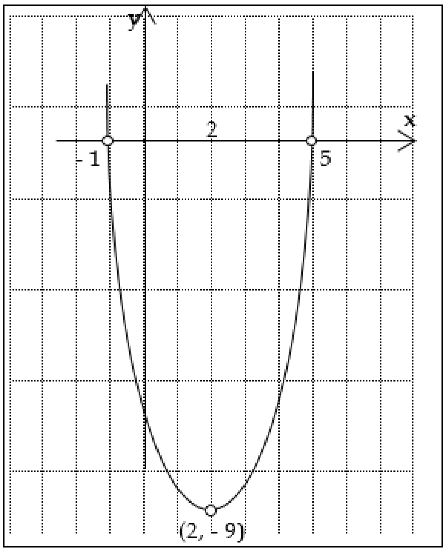
Nilai Stasioner dan Titik Stasioner

Jika sebuah fungsi *y = f(x)* kontinu dan diferensiabel di *x = a* dan *f ’(a) = 0,* maka *f(a)* merupakan nilai stationer *f(x)* di x = a. Titik *P(a, f(x))* yang terletak pada grafik fungsi *y = f(x)* disebut sebagai titik stationer atau titik ekstrem atau titik kritis. Nilai x yang menyebabkan *f(x)* mempunyai nilai stationer dapat ditentukan dari syarat *f ’(x) = 0.*

Contoh:

Tentukan titik stationer dan nilai staionernya jika diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Penyelesaian :



$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$f'(x) = 2x - 4$ syarat stasioner adalah $f'(x) = 0$

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$

untuk x = 2 diperoleh $f(2) = 2^2 - 4.2 - 5 = -9$

jadi titik stasionernya adalah (2, - 9)

dengan nilai stasioner = - 9

3. Integral

Jika fungsi y = F (x) kontinu pada domain Df, sedemikian hingga $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$, maka

a. untuk mencari $F'(x) = f(x)$ digunakan operasi turunan fungsi atau derivative (hitung defferensial).
b. Untuk mencari y = F (x) digunakan operasi anti turunan atau anti derivative atau lebih lazim disebut hitung integral.
   Jadi hitung integral adalah kebalikan (invers) dari hitung defferensial.

Integral fungsi aljabar

$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, dengan n ≠ - 1

Contoh:

Selesaikan pengintegralan berikut : $\int 5x^2 \, dx$

Penyelesaian:

$$\int 5x^2 \, dx = \frac{5}{3} x^3 + C = \frac{5}{3} x^3 + C$$

Penerapan Integral pada geometri

Gradient garis singgung kurva di sembarang titik A (x, y) adalah turunan pertama dari fungsi adalah $m = \frac{dy}{dx} = F'(x)$, sehingga untuk menentukan fungsi (F (x)) yang diketahui gradient di titik A (x, y) pada grafik fungsi, ditentukan dengan menggunakan hitung integral.

Contoh:

Gradien garis singgung kurva di setiap titik adalah 2x. Jika kuva melalui titik (3, 3). Tentukan pesamaan kurva tersebut!

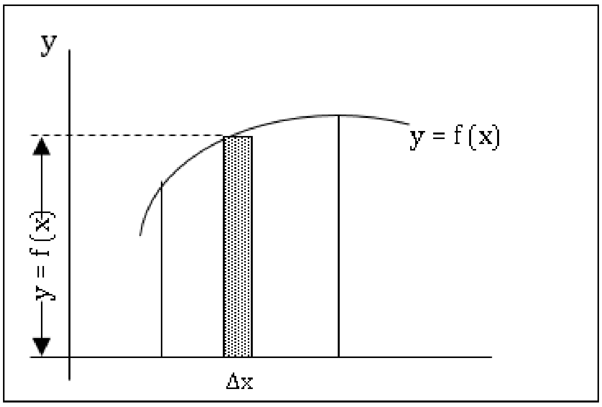
Penyelesaian ;

y = $\int F'(x)dx$ = $\int 2xd$ x = x^2 + C

Kurva melalui titik (3, 3) berarti; C = -6

Jadi , persamaan kurva yang dimaksud adalah y = $x^2 - 6$

Menghitung Luas Daerah di Bawah Kurva y = f(x), Sumbu x, garis x = a dan garis x = b



Luas persegipanjang berarsir = f (x) . Δx. Maka luas daerah yang dibatasi oleh fungsi f(x), garis x = a dan x = b, dengan cara menjumlah luas persegipanjang kecil-kecil itu di sepanjang y = f (x). Jika Δx mendekati 0 maka luasnya :

L = $\sum_a^b \quad f(x)\Delta x$ atau : L = $\int_a^b f(x)\,dx$ = $\int_a^b y\,dx$

Contoh:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = $x^2 - 4$ dan sumbu-x !

Penyelesaian :

L = $-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$

= $-\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$

$= -\left[\left(\frac{1}{3}.2^3 - 4.2\right) - \left(\frac{1}{3}.(-2)^3 - 4(-2)\right)\right]$

$= -\left[\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3}.+8\right)\right]$

$= -\left[\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8\right]$

$= -\left[\frac{16}{3} - 16\right]$

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ dengan

$f(x) > g(x)$ dapat ditentukan dengan rumus : L = $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

D. Rangkuman

1. Limit Fungsi Aljabar

a. Limit fungsi f(x) untuk x a

Ditulis: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

artinya, jika x mendekati nilai a maka f(x) mendekati nilai L.

Untuk menentukan nilai limit suatu fungsi f(x) gunakan cara substitusi, yaitu dengan mengganti nilai x pada fungsi f(x) dengan nilai a. Jika hasilnya $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$ / $\infty \pm \infty$, maka langkah-langkah untuk menentukan nilai limit fungsi tersebut yaitu dengan cara:

- f(x) difaktorkan/ dikali sekawan akar, kemudian
- f(x) disederhanakan dengan menghilangkan salah satu faktor dari pembilang dan penyebut, dan
- substitusi kembali nilai x = a terhadap fungsi f(x) tersebut.

b. Limit fungsi f(x) untuk x □∞

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0}$$

Terdapat dua bentuk limit:

i. Limit fungsi bentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

Untuk menentukan nilai limit fungsi bentuk di atas, yaitu dengan cara dibagi oleh variabel pangkat tertinggi dari pembilang (f(x)) atau penyebut (g(x)).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0} = \mathrm{L}$$

- Jika m > n maka L = ∞
- Jika m < n maka L = 0
- Jika m = n maka $\mathrm{L}=\frac{a_m}{b_n}$

ii. limit fungsi bentuk $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-g(x)$

Untuk menentukan nilai limit fungsi bentuk di atas, pertama fungsi tersebut dikali sekawan akar $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$ agar terbentuk fungsi rasional. Kemudian fungsi tersebut dibagi oleh variabel pangkat tertinggi dari pembilang atau penyebutnya seperti limit fungsi bentuk pertama.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}=\mathrm{L}$$

- Jika a > p maka L = $+\infty$
- Jika a < p maka L = $-\infty$
- Jika a = p maka $\mathrm{L}=\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

2. Limit Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus dasar untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri adalah sebagai berikut :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
9. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
10. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

3. Rumus Dasar Turunan

Secara definitive fungsi turunan dapat dirumuskan sebagai berikut ;

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4. Turunan Fungsi Aljabar

Rumus-rumus turunan:

No	Fungsi (f(x))	Turunan (f'(x))
1	$f(x) = ax^n$	$f'(x) = n.ax^{n-1}$
2	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
3	$f(x) = U \pm V$	$f'(x) = U' \pm V'$
4	$f(x) = U^n$	$f'(x) = nU^{n-1}.\ U'$
5	$f(x) = U.\ V$	$f'(x) = U'.\ V + U.\ V'$
6	$f(x) = \frac{U}{V}$	$f'(x) = \frac{U'.V - U.V'}{V^2}$

5. Turunan Fungsi Trigonometri

No	Fungsi (f(x))	Turunan (f'(x))
1	f(x) = sin x	f'(x) = cos x
2	f(x) = cos x	f'(x) = –sin x
3	f(x) = tan x	f'(x) = $\sec^2$ x
4	f(x) = cotan x	f'(x) = –cosec^2 x
5	f(x) = sec x	f'(x) = sec x. tan x
6	f(x) = cosec x	f'(x) = – cosec x. cotan x
7	f(x) = sin ax	f'(x) = a cos ax
8	f(x) = cos ax	f'(x) = –a sin ax
9	f(x) = sin U	f'(x) = U' cos U
10	f(x) = cos U	f'(x) = –U' sin U

6. Aplikasi Turunan

a. Persamaan Garis Singgung

Bentuk umum persamaan garis singgung dinyatakan dalam bentuk umum:

- $y = mx + c$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$

dengan gradien (m) dapat ditentukan melalui turunan pertama fungsi f(x) yang disinggung oleh garis tersebut. maka: $\boxed{m = f'(x)}$

rumus lain dari gradien (m):

1. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3. Kedudukan dua buah garis: i) 2 garis sejajar ($m_1 = m_2$) ii) 2 garis saling tegak lurus ($m_1 . m_2 = -1$)
2. m = tan α	

b. Fungsi Naik dan Turun

syarat suatu fungsi f(x) naik: **f ’(x) > 0**

syarat suatu fungsi f(x) turun: **f ’(x) < 0**

c. Titik Stasioner (maksimum/ minimum)

Titik stasioner suatu fungsi f(x) ditentukan melalui:

f ‘(x) = 0

d. Titik Belok

Titik belok suatu fungsi f(x) ditentukan melalui:

f ‘‘ (x) = 0

7. Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

$\int a\,dx = ax + c$	$\int k.f(x)\,dx = k\int f(x)dx$
$\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$	$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

8. Integral Tak Tentu fungsi Trigonometri

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \sec x.\tan x\,dx = \sec x + c$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int \operatorname{cosec} x.\operatorname{cotan} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$	$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotan} x + c$	$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

9. Teknik Pengintegralan

a. Metode substitusi

$$\boxed{\int U^n\,dx = \frac{1}{n+1}U^{n+1} + c}$$

Rumus khusus integral substitusi:

$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}.\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + c$	$\int \sin^n ax.\cos ax\,dx = \frac{1}{a}.\frac{1}{n+1}\sin^{n+1} ax + c$
$\int V.U^n dx = \frac{V}{U'}.\frac{1}{n+1}U^{n+1} + c$	$\int \cos^n ax.\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} ax + c$

b. Metode parsial

$$\int U\,dv = U.V - \int V\,du$$

10. Integral Tentu

Rumus dasar integral tentu:

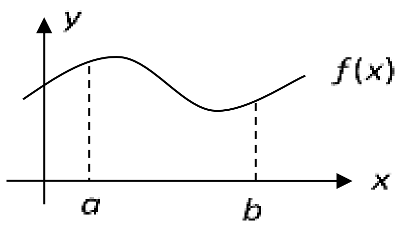
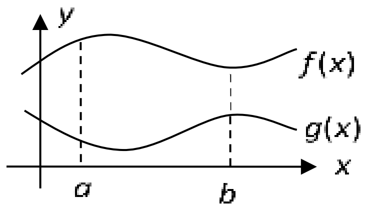
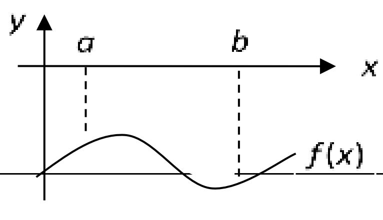
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

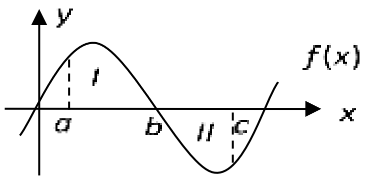
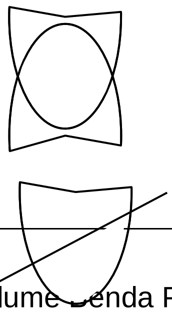
sifat integral tentu:

$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$	$\int_a^b f(x) \pm g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$
$\int_a^b k.f(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$	$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

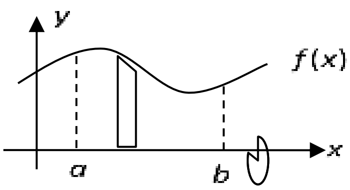
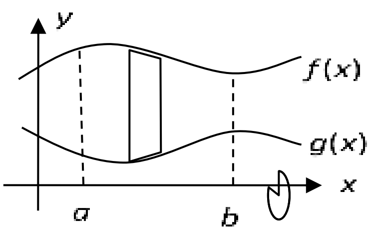
11. Aplikasi Integral

a. Integral Luas

	$L = \int_a^b f(x)\ dx$
	$L = \int_a^b f(x) - g(x)\ dx$
	$L = -\int_a^b f(x)\ dx = \int_b^a f(x)\ dx$

	$L = L_I + L_{II}$ $= \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$
	Luas daerah yang di batasi oleh fungsi kuadrat-kuadrat dan fungsi kuadrat-linear dapat digunakan rumus khusus sbb: $\boxed{L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}}$ dengan D = $b^2 - 4ac$

b. Volume Benda Putar

	Benda diputar terhadap sumbu x: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ Benda diputar terhadap sumbu y: $V = \pi \int_c^d f(y)^2 dy$
	Benda diputar terhadap sumbu x: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$ Benda diputar terhadap sumbu y: $V = \pi \int_c^d f(y)^2 - g(y)^2 dy$

Pembelajaran 6. Kombinatorika dan Statistika

A. Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kaidah pencacah, permutasi, dan kombinasi
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan peluang kejadian
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pemusatan data dan penyebaran

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menganalsis kaidah pencacahan melalui masalah kontekstual
2. Menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan konsep permutasi
3. Menyelesaikanmasalah kontekstual dengan konsep kombinasi
4. Menerapkan konsep peluang suatu kejadian untuk menyelesaikan masalah kontekstual
5. Menetukan ukuran pemusatan data berkelompok
6. Menetukan ukuran penyebaran data berkelompok

C. Uraian Materi

1. Kaidah Pencacahan, Permutas, dan Kombinasi

Kaidah Pencacahan

Hal yang dibicarakan dalam kombinatorika adalah aturan pencacahan. Pada aturan pencacahan terdapat dua prinsip utama, yaitu aturan perkalian dan aturan penambahan.

Untuk aturan perkalian, dapat dinyatakan sebagai berikut:

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama dan kejadian kedua tersebut secara bersama-sama terjadi dalam ($m \times n$) cara."

Contoh:

a. Berapakah banyaknya kejadian yang mungkin muncul jika 2 dadu dilempar satu kali?

b. Pada suatu kelas yang terdiri atas 20 peserta didik akan dibentuk kepengurusan kelas yaitu ketua dan sekretaris. Ada berapa cara kepengurusan kelas tersebut dapat dibentuk?

Jawab

a. Dadu pertama akan muncul 6 kemungkinan kejadian, dadu kedua juga akan muncul 6 kemungkinan kejadian. Kejadian secara bersamaan akan muncul $6 \times 6 = 36$ kemungkinan kejadian.
b. Untuk ketua kelas ada 20 cara, untuk sekretaris ada 19 cara. Secara berpasangan ada $20 \times 19 = 380$ cara.

Sedangkan untuk aturan penambahan, perhatikan pernyataan berikut:

"Jika dalam kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n cara, maka kejadian pertamaa atau kedua dapat terjadi dalam $(m + n)$ cara"

Contoh:
Di dalam kotak berisi 5 pulpen dan 3 pinsil. Berapakah banyaknya cara untuk mengambil 1 pulpen atau 1 pinsil?
Jawab
Kejadian memilih 1 pulpen ada 5 cara,
Kejadian memilih 1 pinsil ada 3 cara,
Banyaknya memilih 1 pulpen atau 1 Pinsil adalah $5 + 3 = 8$

Permutasi

Pada aturan pencacahan Permutasi, urutan kejadian sangat diperhatikan. Perhatikan pernyataan berikut:

"Jika diberikan n obyek berbeda, sebuah permutasi k dari n obyek berbeda adalah sebuah jajaran dari k obyek yang urutannya diperhatikan"

Contoh

Diberikan huruf-huruf a, b, c dan d.

abcd, dbca, cadb, dbac dan sebagainya adalah permutasi-permutasi 4 huruf dari 4 huruf

abc, abd, acb, bca, dcb dan sebagainya adalah permutasi-permutasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui

cb, bd, ad, cd, ba, dc dan sebagainya adalah permutasi-permutasi 2 huruf dari 4 huruf yang diketahui

dan seterusnyanya

Banyaknya Permutasi r-obyek dari n-Obyek yang berbeda diberi notasi $P(n,r)$ dimana

$$P_r^n = P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kombinasi

Pada aturan pencacahan Kombinasi, urutan kejadian tidaklah diperhatikan. Perhatikan pernyataan berikut:

“Diberikan n-obyek berbeda. Sebuah kombinasi k dari n-obyek berbeda adalah jajaran dari k-obyek yang urutannya tidak diperhatikan”

Contoh

Misalkan dari 4 bersaudara Asep (A), Beni (B), Caca (C) dan Deni (D) akan diundang 2 orang untuk mewakili rapat keluarga besar. Ada berapa cara memenuhi undangan tersebut? Bagaimana jika yang diundang 3 orang dari 4 bersaudara itu?

Jika diundang 2 orang untuk mewakili rapat keluarga besar itu, maka yang mungkin hadir adalah (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D). Jika sudah ada (A,B) maka tidak boleh dimasukkan lagi (B,A) karena (A,B) = (B,A).

Jika diundang 3 orang untuk mewakili rapat keluarga besar, maka yang mungkin hadir adalah (A,B,C), (A,B,D), (A,C,D) dan (B,C,D) dimana (A,B,C)=(A,C,B)=(B,C,A)=(B,A,C)=(C,A,B)=(C,B,A).

$$C_k^n = C(n,k) = (n\ k\ ) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2. Teori Peluang

Ruang Sampel

Untuk memahami ruang sampel dilambangkan S, misalnya siswa diminta melempar satu keping uang logam, maka kemungkinan yang muncul A (angka) atau G (gambar). Percobaan lain yang bisa dilakukan misalnya melempar sebuah dadu, kemungkinan muncul mata dadu bernomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6. Seluruh kejadian atau kemungkinan yang mungkin terjadi atau muncul disebut ruang sampel. Jadi ruang sampel pelemparan satu keping uang logam adalah {A,G} dan ruang sampel pelemparan sebuah dadu adalah { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Jadi, Ruang sampel {S} adalah semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.

Contoh 1 :

Suatu percobaan melemparkan sebuah dadu dan satu keping uang logam secara bersamaan, maka ruang sampelnya adalah :

S = { (A,1), (A,2), (A,3), (A,4), (A,5), (A,6), (G,1), (G,2), (G,3), (G,4), (G,5), (G,6)}

Contoh 2 :

Suatu percobaan melantunkan 2 mata uang logam bersama-sama. Maka ruang sampelnya : S = { AA , AG , GA , GG } , dimana A = Angka dan G = gambar.

Titik Sampel

Titik sampel adalah semua anggota dari ruang sampel.

Contoh :

Pada pelemparan sebuah dadu ruang sampelnya S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6},
maka titik sampelnya : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dalam percobaan pelantunan 2 mata uang bersama-sama, ruang sampelnya adalah : S = { AA , AG , GA , GG }, maka titik sampelnya : (AA) , (AG) , (GA) , (GG).

Kejadian

Kejadian adalah sekelompok titik sampel yang membentuk himpunan bagian dari ruang sampel.

Contoh 1:

Dari percobaan pelemparan sebuah dadu, tentukan:

a. kejadian muncul angka kelipatan 2
b. kejadian muncul angka prima

Penyelesaian:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

a. Misal kejadian A adalah munculnya mata dadu dengan angka kelipatan 2, maka kejadian A = { 2, 4, 6 }, n(A) = 3.
b. Misal kejadian P adalah munculnya mata dadu prima, maka kejadian P = { 2, 3, 5 }, n(P) = 3.

Peluang

Dalam suatu percobaan, peluang kejadian munculnya A adalah perbandingan antara banyaknya anggota A dengan dengan banyaknya semua kemungkinan yang mungkin terjadi pada suatu percobaan. Peluang munculnya kejadian A diberi lambang P(A) dan dihitung dangan rumus sebagai berikut : P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)}$,

dengan: n(A) = banyaknya anggota kejadian A
n(S) = banyaknya anggota ruang sampel.

Besarnya peluang terletak antara 0 sampai 1 atau **0 ≤ P(A) ≤ 1**, jika P(A) = 0 maka disebut **kemustahilan** (tak mungkin terjadi) dan jika P(A) = 1 maka disebut **kepastian** (pasti terjadi).

Hubungan nilai kepastian dan lawannya (kemustahilan) adalah :

$P(N) = 1 – P(N^C)$ atau **$P(N) + P(N^C) = 1$**

dimana : **N^C** = kejadian bukan N

Contoh :

Sebuah dadu dilemparkan sekali, hitunglah peluang munculnya

a. Jumlah mata dadu bilangan prima !
b. Jumlah mata dadu ≤ 6

c. Jumlah mata dadu = 7

Penyelesaian :

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } atau n(S) = 6

a. Kejadian jumlah mata dadu bilangan prima : P = { 2, 3, 5 } atau n(P) = 3

P(P) = $\frac{n(P)}{n(S)}$ = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$

c. Kejadian muncul jumlah mata dadu ≤ 6: B= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, n(B) = 6

P(B) = $\frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$ (**Kepastian**)

d. Kejadian muncul jumlah mata dadu = 7: C= { }, n (C) = 0

P(C) = $\frac{n(C)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$ (**Kemustahilan**).

Frekuensi Harapan

Misalkan P(A) adalah peluang kejadian A dalam suatu percobaan yang dilakukan n kali, maka frekuensi harapan kejadian A adalah **Fh(A) = n ×P(A)** ,

Contoh :

Tiga uang logam yang dilempar secara serentak sebanyak 120 kali, berapkah frekuensi harapan munculnya 2 gambar ?

Penyelesaian :

S = { AAA , AAG ,AGA , GAA, AGG, GAG, GGA, GGG } maka n(S) = 8

Misal kejadian muncul 2 gambar adalah kejadian Q, maka :

Q = { GGA , GAG , AGG } maka n(Q) = 3

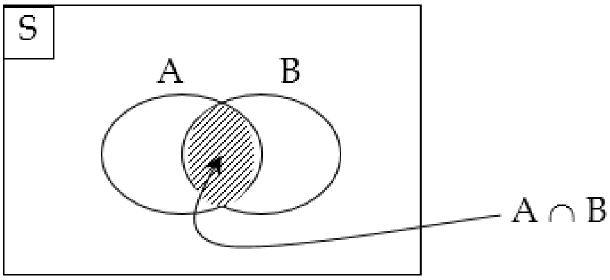
Sehingga P(Q) = $\frac{n(Q)}{n(S)}$ = $\frac{3}{8}$

Maka frekuensi harapan kejadian Q adalah : Fh(Q) = 120 x $\frac{3}{8}$ = 45

Kejadian Saling Lepas

Misalkan A adalah kejadian terambilnya kartu As dan B adalah kejadian terambilnya kartu keriting pada pengambilan secara acak pada satu set kartu Bridge. Pada kejadian ini mungkin terjadi kejadian A sekaligus terjadi kejadian B, misalkan terambil kartu As keriting.

Perhatikan diagram Venn berikut :



Dari diagram Venn di atas didapatkan bahwa :

$$n\,(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sehingga :

$$P\,(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dengan demikian untuk sembarang kejadian **A atau B** berlaku :

$$P\,(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dua kejadian A dan B dikatakan kejadian saling lepas apabila himpunan A dan B saling asing atau $A \cap B = \emptyset$ sehingga $P(A \cap B) = 0$. Akibatnya peluang $A \cup B$ adalah **jumlah peluang A dengan peluang B**.

$$P\,(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh :

Sebuah dadu dilempar satu kali, A adalah kejadian muncul mata dadu genap dan B adalah kejadian muncul mata dadu prima, hitunglah peluang munculnya mata dadu genap atau kelipatan 5.

Penyelesaian :

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } maka n(S) = 6

Misal kejadian muncul kelipatan 5 adalah kejadian C, maka C = {5} sehingga n(C) = 1

Sehingga : A ∩ C = { } atau ∅ (himpunan kosong)

Maka : P (A∪C) = P(A) + P(C)

$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$

$= \frac{2}{3}$

Kejadian Saling Bebas

Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika terjadinya A tidak mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B dan sebaliknya.

Pada kejadian A dan B saling bebas berlaku : *P(A∩B) = P(A) x P(B)*

Contoh :

Dalam percobaan pengambilan bola dari kotak I dan kotak II. Kotak I berisi 4 bola hitam (H) dan 6 bola putih (P), kotak II berisi 5 bola merah (M) dan 4 bola putih. Dari kotak I diambil 3 bola dan dari kotak dua diambil 4 bola. Tentukan peluang terambilnya 3 bola hitam dari kotak I dan 4 bola merah dari kotak II.

Penyelesaian :

P(A) = P(3H kotak I) = $\frac{C_{(4,3)}}{C_{(10,3)}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

P(B) = P(4M kotak II) = $\frac{C_{(5,4)}}{C_{(9,4)}} = \frac{5}{126}$

Maka P(A∩B) = P(A) x P(B)

$= \frac{1}{30} \times \frac{5}{126}$

$= \frac{1}{756}$

3. Statistika

Ukuran Pemusatan

Salah satu hal yang penting pada statistika yaitu pemahaman berbagai ukuran statistik untuk memberikan interpretasi data. Suatu kumpulan data biasanya memiliki kecenderungan memusat ke sebuah nilai tertentu yang dapat mewakili seluruh data. Nilai tersebut biasanya terletak di pusat data dan disebut **nilai sentral (nilai pusat).** Ada tiga jenis ukuran pemusatan data yang banyak digunakan, yaitu Rata-rata Hitung (*Mean*), Nilai Tengah (*Median*) dan Nilai yang Paling Sering Muncul (*Modus*).

a. Mean

Mean dilambangkan dengan $\overline{x}$ (dibaca x bar) didefinisikan sebagai hasil bagi jumlah nilai data dengan banyaknya data.

Data Tunggal

Jika terdapat n buah nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ maka

Mean $= \overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n}$ atau $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ atau $\overline{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

dengan $\sum x$ = jumlah semua data dan n = banyak data

Contoh: Carilah mean dari data : 8, 4, 5, 3, 6

Jawab : $\overline{x} = \dfrac{8+4+5+3+6}{5} = \dfrac{26}{5} = 5{,}2$

Untuk data berbobot yaitu apabila setiap x_i mempunyai frekuensi f_i maka mean adalah :

$$\overline{x} = \frac{f_1.x_1 + f_2.x_2 + f_3.x_3 + \ldots. + f_k.x_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots. + f_k}$$ atau

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i.x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$ atau $$\overline{x} = \frac{\sum f.x}{\sum f}$$

Contoh : Hitung mean data nilai fisika 40 anak berikut :

Nilai	5	6	7	8	9
frekuensi	6	15	13	4	2

Jawab :

Nilai	f	f.x
5	6	30
6	15	90
7	13	91
8	4	32
9	2	18
Jumlah	40	261

$\bar{x} = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{261}{40} = 6,5$

Data Berkelompok

Untuk data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frejuensi, terlebih dahulu harus ditentukan tanda kelas atau nilai tengah dari masing-masing kelas interval (x_i)

$$x_i = \frac{batas\ atas\ kelas - batas\ bawah\ kelas}{2}$$

Selanjutnya $\bar{x}$ dapat dihitung dengan 3 cara, yaitu secara langsung, dengan rata-rata sementara dan dengan cara "coding".

Secara langsung

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Dengan:

x_i = tanda kelas ke-*i*

f_i = frekuensi pada kelas ke-*i*

$\sum f_i$ = banyak data (jumlah semua frekuensi)

Contoh : Tentukan mean dari data berikut :

Kelas	Frekuensi
21-25	2
26-30	8
31-35	9
36-40	6
41-45	3
46-50	2

Jawab :

Kelas	f_i	x_i	$f_i.x_i$
21-25	2	23	46
26-30	8	28	224
31-35	9	33	297
36-40	6	38	228
41-45	3	43	129
46-50	2	48	96
Jumlah	30		1020

Maka mean $\overline{x} = \frac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i}$

$= \frac{1020}{30}$

$= 34$

Dengan rata-rata sementara ($\overline{x_s}$)

Terlebih dulu ditentukan rata-rata sementara (rata-rata yang diduga) $\overline{x_s}$, biasanya diambil dari titik tengah kelas dengan frekuensi terbesar. Kemudian menghitung simpangan tiap data terhadap rata-rata sementara dengan rumus $d_i = x_i - \overline{x}_s$.

Mean (rata-rata hitung) sebenarnya dinyatakan dengan rumus

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum f_i.d_i}{\sum f_i} \quad \text{atau} \quad \overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum f.d}{\sum f}$$

Contoh: Hitung mean data pada tabel di atas dengan menggunakan rata-rata sementara.

Penyelesaian:

Kelas	f_i	x_i	$d_i = x_i - x_s$	$f_i . d_i$

21-25 26-30 31-35 36-40 41-45 46-50	2 8 9 6 3 2	23 28 33 38 43 48	-10 -5 0 5 10 15	-20 -40 0 30 30 30
Jumlah	30			30

Maka Mean $\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i . d_i}{\sum f_i}$

$= 33 + \frac{30}{30}$

$= 33 + 1$

$= 34$

Dengan cara "*Coding*"

Terlebih dulu ditentukan rata-rata sementara (rata-rata yang diduga) $\bar{x}_s$, biasanya diambil dari titik tengah kelas dengan frekuensi terbesar. Kelas interval yang memuat rata-rata sementara diberi kode 0. Kelas interval diatasnya diberi kode -1, -2 dst, sedangkan kelas interval di bawahnya diberi kode 1, 2, dst.

Selanjutnya mean sebenarnya dihitung dengan rumus:

$$\bar{x} = \bar{x}_s + p\left(\frac{\sum f_i . \mu_i}{\sum f_i}\right)$$

dengan p = panjang kelas

Contoh: Hitung mean data pada tabel di atas dengan menggunakan cara "coding".

Penyelesaian:

Kelas	f_i	x_i	μ_i	$f_i . \mu_i$
21-25 26-30 31-35 36-40 41-45 46-50	2 8 9 6 3 2	23 28 33 38 43 48	-2 -1 0 1 2 3	-4 -8 0 6 6 6
Jumlah	30			6

Maka Mean $\bar{x} = \bar{x}_s + p\left(\frac{\sum f_i.\mu_i}{\sum f_i}\right)$

$= 33 + 5\left(\frac{6}{30}\right)$

$= 33 + 1$

$= 34$

b. Median/Nilai tengah

Median dilambangkan dengan *Me* adalah nilai yang letaknya di tengah atau data ke $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ dari data yang telah diurutkan dari nilai terkecil sampai terbesar.

Median Data Tunggal

- Jika banyak data **ganjil** maka Me adalah data yang terletak **tepat yang di tengah** setelah diurutkan.
- Jika banyak data **genap** maka Me adalah **rata-rata dari dua data yang terletak di tengah** setelah diurutkan.

Contoh :

Tentukan median dari data: 3,5,4,7,5,6,7,6,8,9,4,6,6

Jawab:

Data diurutkan menjadi 3,4,4,5,5,6,6,6,67,7,8,9 (n=13)

Me = data ke-$\left(\frac{13+1}{2}\right)$

= data ke-7

= 6

Median Data Berkelompok

Untuk menetukan median dari data berkelompok, terlebih dahulu dihitung frekuensi kumulatif dari setiap kelas interval dan ditentukan kelas median atau kelas yang memuat data ke-$\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Selanjutnya Me dihitung dengan rumus:

$$Me = Tb + p.\frac{\left(\frac{n}{2} - F\right)}{f}$$

dengan Tb = tepi bawah kelas Median

$$= \frac{batas\ bawah\ kelas\ median + batas\ atas\ kelas\ sebelumnya}{2}$$

p = panjang kelas interval

n = banyak data

F = frekuensi komulatif sampai dengan kelas sebelum kelas Me

f = frekuensi pada kelas Me

Contoh: Tentukan Median dari data berikut:

Kelas	F
20 – 29	7
30 – 39	13
40 – 49	20
50 – 59	12
60 - 69	8

Jawab:

Kelas	f	F
20 – 29	7	7
30 – 39	13	**20**
40 – 49	**20**	40
50 – 59	12	52
60 - 69	8	60
Jumlah	60	

Kelas median

Tb = $\frac{40+39}{2} = 39{,}5$

n = 60

p = 40 – 30 = 10

F = 20

f = 20

Me = 39,5 + $\dfrac{10\left(\dfrac{60}{2}-20\right)}{20}$

= 39,5 + $\dfrac{10(30-20)}{20}$

= 39,5 + $\dfrac{10.10}{20}$

= 39,5 + 5

= **44,5**

c. Modus

Modus dilambangkan dengan ***Mo*** adalah data yang paling sering muncul atau data yang memiliki frekuensi terbanyak.

Modus Data Tunggal

Contoh: Tentukan modus dari data

a. 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5,6, 9

b. Perhatikan data berikut ini

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
3	4	7	5	6	5	7	6	8	6

Jawab:

a. Mo = 5

b. Mo = 6

Modus Data Berkelompok

Untuk data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, terlebih dahalu ditentukan kelas modus (kelas dengan frekuensi terbesar), kemudian modus dihitung dengan rumus:

Mo = Tb + p $\left(\dfrac{d_1}{d_1+d_2}\right)$

dengan:

Tb = tepi bawah kelas modus

p = panjang kelas

d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sebelumnya.

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sesudahnya.

Contoh:

Tentukan modus dari data berikut:

Kelas	f
21 – 25	2
26 – 30	8
31 – 35	9
36 – 40	6
41 – 45	3
46 - 50	2

Kelas modus

Jawab:

Tb = 30,5

p = 5

$d_1 = 9 - 8 = 1$

$d_2 = 9 - 6 = 3$

$$Mo = 30,5 + 5\left(\frac{1}{1+3}\right)$$

$= 30,5 + 1,25$

$=$ **31,75**

Ukuran Penyebaran

Ukuran penyebaran data (dispersi) meliputi: jangkauan, kuartil, desil, presentil, simpangan kuartil, simpangan rata-rata dan simpangan baku. Seain itu pada kegiatan belajar ini akan dibahas pula mengenai nilai standar (*Z- Score*) dan koefisien variasi.

Jangkauan

Jangkauan atau Range (R) adalah selisih data terbesar (x_{max}) dengan data terkecil (x_{min}), dirumuskan dengan

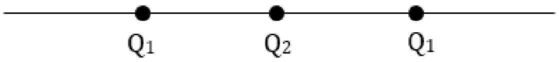
$$R = x_{max} - x_{min}$$

Contoh. Tentukan jangkauan dari data: 7, 12, 9, 11, 15, 27, 14, 17, 19, 24, 16

Jawab : R = 27 – 7 = 20

Kuartil

Kuartil dilambangkan Q_i adalah nilai data yang membagi keseluruhan data terurut menjadi empat bagian yang sama banyaknya. Dengan demikian terdapat tiga kuartil, yaitu:



Kuartil data tunggal

Untuk data tunggal, kuartil dapat dihitung dengan rumus:

$$Q_i = \text{data ke } \frac{i(n+1)}{4} \qquad \text{dengan } i = 1,2,3$$

Contoh : Tentukan kuartil dari data 3,4,4,5,5,6,6,6,6,7,7,8,9 (n=13)

Jawab :

Q_1 = data ke- $\frac{1(13+1)}{4}$

= data ke-3½

= $\frac{4+5}{2}$

= 4,5

Q_2 = data ke- $\frac{2(13+1)}{4}$

= data ke-7

= 6

Q_3 = data ke- $\frac{3(13+1)}{4}$

= data ke-10½

= $\frac{7+7}{2}$

= 7

Kuartil data berkelompok

Kuartil dari data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dapat dihitung dengan rumus:

$$Q_i = Tb + p\left(\frac{\frac{i}{4}.n - F}{f}\right) \qquad \text{dengan } i = 1,2,3$$

dengan:

Tb = tepi bawah interval Q_i

P = panjang kelas interval Q_i

n = banyak data

F = frekuensi kumulatif sampai kelas sebelum kelas Q_i

f = frekuensi pada kelas Q_i

Contoh: Hitung kuartil dari data pada Tabel 4.2 berikut :

Nilai	f	F	
51 – 55	4	4	
56 - 60	20	24	
61 – 65	24	48	← Q_1
66 – 70	56	104	← Q_2
71 – 75	19	123	← Q_3
76 – 80	16	139	
81 – 85	10	149	
86 – 90	7	156	
91 – 95	3	159	
96 – 100	1	160	

Jawab :

$$Q_1 = 60{,}5 + 5\left(\frac{\frac{1}{4}.160 - 24}{24}\right) = 60{,}5 + 3{,}35 = 63{,}85$$

$$Q_2 = 65{,}5 + 5\left(\frac{\frac{2}{4}.160 - 48}{56}\right) = 65{,}5 + 2{,}86 = 68{,}36$$

$$Q_3 = 70{,}5 + 5\left(\frac{\frac{3}{4}.160 - 104}{19}\right) = 70{,}5 + 4{,}21 = 74{,}71$$

Jangkauan Antar Kuartil (Hamparan = H)

Jangkauan Antar Kuartil adalah selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah, dirumuskan dengan:

$$H = Q_3 – Q_1$$

Contoh: Hitunglah hamparan dari data pada Tabel 4.2

Jawab: H = 74,71 - 63,85 = 10,86

Jangkauan Semi Inter Kuartil (Simpangan Kuartil = Q_d)

Jangkauan Semi Inter Kuartil adalah setengah dari selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah, dirumuskan dengan:

$$Q_d = \frac{1}{2}\,(Q_3 - Q_1)$$

Contoh: Hitunglah simpangan kuartil dari data pada Tabel 4.2

Jawab: $Q_d = \frac{1}{2}$ (74,71 - 63,85) = 5,43

Desil

Desil dilambangkan dengan D_i adalah nilai data yang membagi keseluruhan data terurut menjadi sepuluh bagaian yang sama banyaknya. Dengan demikian terdapat sembilan desil, yaitu desil ke-1 (D_1), desil ke-2 (D_2),..., desil ke-9 (D_9).

Desil data tunggal

Untuk data tunggal, desil dapat dihitungan dengan rumus:

D_i = data ke $\frac{i(n+1)}{10}$ dengan i = 1,2,3,4,…,9

Contoh: Tentukan D_1, D_3 dan D_7 dari data 3,4,4,5,5,6,6,6,6,7,7,8,9 (n=13)

Jawab:

D_1 = data ke- $\frac{1(13+1)}{10}$

= data ke-1 $^2/_5$ (antara data ke-1 dan ke-2)

= 3 + $^2/_5$ (4 – 3)

= 3,4

D_3= data ke- $\frac{3(13+1)}{10}$

= data ke-4 $^1/_5$ (antara data ke-4 dan ke-5)

= 5 + $^1/_5$ (5 - 5)

= 5

D_7 = data ke-$\frac{7(13+1)}{10}$

= data ke-9$\frac{4}{5}$ (antara data ke-9 dan ke-10)

= 6 + $\frac{4}{5}$(7 - 6)

= 6,8

Desil data berkelompok

Desil untuk data berkelompok dapat dihitung dengan rumus:

$D_i = Tb + p\left(\frac{\frac{i}{10}.n - F}{f}\right)$ i = 1,2,3,4,…,9

dengan:

Tb = tepi bawah interval kelas D_i

P = panjang kelas interval

n = banyak data

F = frekuensi kumulatif sebelum kelas D_i

f = frekuensi pada kelas D_i

Contoh: Hitung D_5 dan D_9 dari data berikut :

Nilai	f	F	
51 – 55	4	4	
56 - 60	20	24	
61 – 65	24	48	
66 – 70	56	104	← D_5
71 – 75	19	123	
76 – 80	16	139	
81 – 85	10	149	← D_9
86 – 90	7	156	
91 – 95	3	159	
96 – 100	1	160	

Jawab :

$D_5 = 60{,}5 + 5\left(\frac{\frac{5}{10}.160 - 48}{56}\right)$ = 65,5 + 2,86 = 68,36

$D_9 = 80{,}5 + 5\left(\frac{\frac{9}{10}.160 - 139}{10}\right)$ = 80,5 + 0,5 = 81,0

Persentil

Persentil dilambangkan dengan P_i adalah nilai data yang membagi keseluruhan data terurut menjadi seratus bagian yang sama banyaknya. Dengan demikian terdapat 99 persentil, yaitu P_1, P_2, ...,P_{99}.

Persentil data tunggal

Persentil data tunggal dapat diperoleh dengan rumus:

P_i = data ke- $\frac{i(n+1)}{100}$ dengan i = 1,2,...,99.

Contoh: Untuk menentukan kekuatan nyala bola lampu listrik, dicoba menyalakan 120 bola lampu listrik dan diperoleh data sebagai berikut :

Kekuatan nyala (hari)	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Banyaknya lampu	4	16	12	12	8	28	20	8	12

Hitunglah P_{40} dan P_{80} dari data tersebut!

Jawab:

P_{40} = data ke- $\frac{40(120+1)}{100}$

= data ke-48$\frac{2}{5}$

= 49

P_{80} = data ke- $\frac{80(120+1)}{100}$

= data ke-96$\frac{4}{5}$

= 51

Persentil data berkelompok

Untuk data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, persentil dapat dihitung dengan rumus :

$P_i = Tb + p\left(\frac{\frac{i}{100}n - F}{f}\right)$ i = 1,2,3,……,99

dengan:

Tb = tepi bawah kelas P_i

p = panjang kelas

n = banyak data

F = frekuensi kumulatif sampai dengan kelas sebelum kelas P_i

f = frekuensi pada kelas P_i

Contoh: Hitung P_{10} dan P_{90} dari data berikut :

Nilai	f	F
51 – 55	4	4
56 - 60	20	24 ← P_{10}
61 – 65	24	48
66 – 70	56	104
71 – 75	19	123
76 – 80	16	139
81 – 85	10	149 ← P_{90}
86 – 90	7	156
91 – 95	3	159
96 – 100	1	160

Jawab :

$$P_{10} = 55,5 + 5\left(\frac{\frac{10}{100}60-4}{20}\right) = 55,5 + 3,0 = 58,5$$

$$P_{90} = 80,5 + 5\left(\frac{\frac{90}{100}60-139}{10}\right) = 80,5 + 0,5 = 81,0$$

Jangkauan Persentil (JP)

Jangkauan persentil adalah selisih antara persentil ke-90 dengan persentil ke-10, dirumuskan dengan:

$$JP = P_{90} – P_{10}$$

Contoh: hitunglah jangkauan persentil dari data berikut ini:

Nilai	f	F
51 – 55	4	4
56 - 60	20	24
61 – 65	24	48
66 – 70	56	104
71 – 75	19	123
76 – 80	16	139
81 – 85	10	149
86 – 90	7	156
91 – 95	3	159
96 – 100	1	160

Jawab : $JP = P_{90} – P_{10}$

$= 81,0 – 58,5$

$= 22,5$

Simpangan Rata-rata

Simpangan rata-rata dilambangkan (SR) adalah jumlah selisih mutlak nilai setiap data dengan rata-rata dibagi banyaknya data.

a. **Simpangan rata-rata data tunggal**

$$SR = \frac{\sum \left| x_i - \bar{x} \right|}{n}$$

dengan x_i = nilai data

$\bar{x}$ = rata-rata

n = banyak data

Contoh: Tentukan simpangan rata-rata dari data: 7,11,10,9,8,6

Jawab : $\bar{x} = \frac{7+11+10+9+8+6}{6}$ = 8,5

$$SR = \frac{|7-8{,}5| + |11-8{,}5| + |10-8{,}5| + |9-8{,}5| + |8-8{,}5| + |6-8{,}5|}{6}$$

$$= \frac{1{,}5 + 2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2{,}5}{6}$$

$$= \frac{9}{6}$$

= 1,5

Simpangan rata-rata data berkelompok

$$SR = \frac{\sum (f_i \left| x_i - \bar{x} \right|)}{\sum f_i}$$

dengan f_i = frekuensi data kelas ke-i

x_i = nilai tengah kelas ke-i

$\bar{x}$ = mean (rata-rata)

$\sum f_i$ = n = banyak data

Contoh : Tentukan simpangan rata-rata data

Interval	f_i	x_i	$f_i.x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i.\|x_i - \bar{x}\|$
21-25	2	23	46	11	22
26-30	8	28	224	6	48
31-35	9	33	297	1	9
36-40	6	38	228	4	24
41-45	3	43	129	9	27
46-50	2	48	96	14	28
Jumlah	30		1020		158

Jawab :

Mean $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1020}{30} = 34$

$SR = \dfrac{\sum f_i.|x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \dfrac{158}{30} = 5{,}27$

Simpangan Baku

Simpangan Baku atau Deviasi Standar dilambangkan dengan SD adalah akar dari jumlah kuadrat selisih antara rata-rata hitung dengan semua nilai dibagi banyaknya.

Data tunggal

Simpangan baku (SD) dari tunggal x_1, x_2, x_3, …..,x_n drumuskan sebagai:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

dengan x_i = data ke-I

$\bar{x}$ = mean

n = banyak data

Contoh: Tentukan simpangan baku dari data 5, 3, 7, 6, 4, 3, 10, 2

Jawab :

$$\bar{x} = \frac{5+3+7+6+4+3+10+2}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

$$SD = \sqrt{\frac{(5-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2+(3-5)^2+(10-5)^2+(2-5)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{0+4+4+1+1+4+25+9}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{48}{8}}$$

$$= \sqrt{6}$$

Data berkelompok

Simpangan baku untuk data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dirumuskan sebegai:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum f_i.(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

dengan f_i = frekuensi kelas ke-i

x_i = nilai tengah kelas ke-i

$\bar{x}$ = mean(rata-rata)

$\sum f_i$ = n = banyak data

Contoh. Hitung simpangan baku dari data :

Interval	f_i	x_i	$f_i.x_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i.(x_i-\bar{x})^2$
21-25	2	23	46	-11	121	242
26-30	8	28	224	-6	36	288
31-35	9	33	297	-1	1	9
36-40	6	38	228	4	16	96
41-45	3	43	129	9	81	243
46-50	2	48	96	14	196	392
Jumlah	30		1020			1270

Jawab :

Mean $\bar{x} = \frac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i} = \frac{1020}{30} = 34$

SD = $\sqrt{\frac{1270}{30}}$ = $\sqrt{42,33}$ = 6,51

Nilai Standar (Z-score)

Nilai standar (Z-Score) adalah nilai yang menyatakan perbedaan antara besar suatu hal/variabel dengan rata-ratanya. Nilai standar digunakan untuk membandingkan dua hasil pengukuran atau lebih sehingga diketahui keberhasilan dua usaha yang dinyatakan dalam data (angka).

Untuk menghitung besarnya Nilai Standar (Z-Score) digunakan rumus :

Z = $\frac{x-\bar{x}}{SD}$

dengan : x = nilai data

$\bar{x}$ = mean (rata-rata)

SD = simpangan baku

Contoh :

Pada ujian matematika, Andi mendapat nilai 68, rata-rata kelasnya 55 dan simpangan baku 10. Berapa Nilai Standar matematika Andi ?

Jawab : x = 68 , $\bar{x}$ = 55 , SD= 10

Z = $\frac{x-\bar{x}}{SD}$ = $\frac{68-55}{10}$ = 1,3

Jadi nilai matematika Andi menyimpang 1,3 di atas nilai rata-rata.

Contoh:

Berikut ini adalah petikan nilai rapor seorang siswa SMK :

Mata Pelajaran	Nilai	Nilai Rata-rata	Simpangan Baku
Bahasa Indonesia	85	75	15
Bahasa Inggris	80	68	10
Matematika	70	65	8

Pada mata pelajaran apa siswa tersebut mendapat kedudukan paling baik?

Jawab :

Nilai Standar Bahasa Indonesia: Z_{Ind} = $\frac{85-75}{15}$ = 0,67

Nilai Standar Bahasa Inggris: $Z_{Ing} = \frac{80-68}{10} = 1{,}2$

Nilai Standar Metematika: $Z_{Mtk} = \frac{70-65}{8} = 1{,}9$

Jadi kedudukan siswa tersebut yang paling baik adalah pada mata pelajaran Matematika.

D. Rangkuman

1. Kaidah Pencacahan

a. Aturan Pengisian tempat

Untuk menentukan banyaknya cara suatu kejadian dapat disusun dari k tempat. ditentukan dengan rumus:

Banyak susunan unsur = n_1 x n_2 x … x n_k

n_1 = banyak cara untuk menempati tempat ke-1

n_2 = banyak cara untuk menempati tempat ke-2

n_k = banyak cara untuk menempati tempat ke-k

b. Permutasi (AB ≠ BA)

Penyusunan unsur-unsur dengan memperhatikan urutan.

i. Permutasi r unsur dari n unsur (r ≤ n)

$$P_r^n = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ii. Permutasi yang mengandung unsur-unsur sama

$${}_nP_{a,b,c,..} = \frac{n!}{a!.b!.c!...}$$

iii. Permutasi siklis

$${}_nP_{siklis} = (n-1)!$$

c. Kombinasi (AB = BA)

Penyusunan unsur-unsur tanpa memperhatikan urutan.

$$C_r^n = nC_r = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

2. Peluang Suatu Kejadian

a. Peluang suatu kejadian

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \qquad 0 \le P(A) \le 1$$

n(A) = banyaknya kejadian A yang diharapkan muncul

n(S) = banyaknya anggota ruang sampel

b. Frekuensi harapan

$$Fh = n \times P(A)$$

n = banyaknya percobaan yang dilakukan

c. Komplemen peluang suatu kejadian

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

A^C = Himpunan kejadian bukan kejadian A

3. Peluang Kejadian Majemuk

a. Operasi gabungan (∗): "atau"

i. Kejadian saling lepas (A) B = ⎞)
P(A ∗ B) = P(A) + P(B)

ii. Kejadian tidak saling lepas (A) B ≠ ⎞)
P(A ∗ B) = P(A) + P(B) – P(A) B)

b. Operasi irisan ()): "dan"

i. Kejadian saling bebas
P(A) B) = P(A). P(B)

ii. Kejadian bersyarat
P(A) B) = P(A). P(B/A)

4. Ukuran Pemusatan Data Statistik

	Rumus	
	Data Tunggal	**Data Kelompok**
MEAN(	$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$	1) $\overline{X} = \frac{\sum f_i . X_i}{\sum f_i}$
		2) $\overline{X} = \overline{X}_s + \frac{\sum f_i . d_i}{\sum f_i}$ $d_i = X_i - \overline{X}_s$

RERATA/RATA-RATAHITUNG)		$\overline{X_s}$ = rata-rata sementara
		3) $\overline{X} = \overline{X_s} + \frac{\sum f_i . u_i}{\sum f_i} . p$ u_i = kode kelas (0, ±1, ±2, …) p = panjang kelas
	Rata-rata gabungan: $\overline{X}_{gab} = \frac{n_1 \overline{X_1} + n_2 \overline{X_2} + ... + n_r \overline{X_r}}{n_1 + n_2 + ... + n_r}$	
MEDIAN	Untuk n ganjil: $M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$ Untuk n genap: $M_e = \frac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right)$	$M_e = T_b + \left(\frac{\frac{1}{2}n - f_k}{f}\right)p$ T_b = tepi bawah kelas median n = banyaknya data f_k = frekuensi kumulatif sebelum kelas median f = frekuensi kelas median p = panjang kelas
MOD	nilai yang paling sering muncul dari suatu data.	$M_o = T_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$ T_b = tepi bawah kelas modus

US		d_1 = selisih frek. kelas modus dengan kelas sebelumnya d_2 = selisih frek. kelas modus dengan kelas sesudahnya

5. Ukuran Letak Data Statistik

	Rumus	
	Data Tunggal	**Data Kelompok**
KUARTIL (Q_i)	untuk n ganjil: $Q_i = X_{\frac{i(n+1)}{4}}$ untuk n genap: $Q_i = X_{\frac{(i.n+2)}{4}}$	$Q_i = Tb_i + \left(\frac{\frac{i}{4}n - fk_i}{f_i}\right)p$ dengan: i = 1, 2, 3.
PERSENTIL (P_i)	$P_i = X_{\frac{i(n+1)}{100}}$	$P_i = Tb_i + \left(\frac{\frac{i}{100}n - fk_i}{f_i}\right)p$ dengan: i = 1, 2, 3, …, 99.
DESIL (D_i)	$D_i = X_{\frac{i(n+1)}{10}}$	$D_i = Tb_i + \left(\frac{\frac{i}{10}n - fk_i}{f_i}\right)p$ dengan: i = 1, 2, 3, …, 9.

6. Ukuran Penyebaran Data Statistik

	Rumus	
	Data Tunggal	**Data Kelompok**
Jangkauan	$J = X_{max} - X_{min}$	J = BA kelas akhir – BB kelas pertama
Rataan Kuartil (RK)	$RK = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$	Rataan Kuartil (RK)
Rataan Tiga (RT)	$RT = \frac{1}{4}(Q_1 + 2Q_2 + Q_3)$	Rataan Tiga (RT)
Jangkauan antar kuartil	$\mathbf{H = Q_3 - Q_1}$	Jangkauan antar kuartil/ Hamparan (H)
Jangkauan semi interkuartil	$Q_d = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$	Jangkauan semi interkuartil/ Simpangan kuartil (Q_d)
Simpangan Rata-rata (SR)	$SR = \frac{\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n}$	$SR = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{\sum f_i}$
Simpangan Baku (S)	$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}}$	$S = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}}$
Varians/ Ragam (S^2)	$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$	$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$

Penutup

Modul belajar mandiri yang telah dikembangkan diharapkan dapat menjadi referensi bagi Anda dalam mengembangkan dan me-*refresh* pengetahuan dan keletarampilan. Selanjutnya, Anda dapat menggunakan modul belajar mandiri sebagai salah satu bahan belajar mandiri untuk menghadapi seleksi Guru P3K.

Anda perlu memahami substansi materi dalam modul dengan baik. Oleh karena itu, modul perlu dipelajari dan dikaji lebih lanjut bersama rekan sejawat baik dalam komunitas pembelajaran secara daring maupun komunitas praktisi (Gugus, KKG, MGMP) masing-masing. Kajian semua substansi materi yang disajikan perlu dilakukan, sehingga Anda mendapatkan gambaran teknis mengenai rincian materi substansi. Selain itu, Anda juga diharapkan dapat mengantisipasi kesulitan-kesulitan dalam materi substansi yang mungkin akan dihadapi saat proses seleksi Guru P3K.

Pembelajaran-pembelajaran yang disajikan dalam setiap modul merupakan gambaran substansi materi yang digunakan mencapai masing-masing kompetensi Guru sesuai dengan indikator yang dikembangkan oleh tim penulis/kurator. Selanjutnya Anda perlu mencari bahan belajar lainnya untuk memperkaya pengetahuan dan keterampilan sesuai dengan bidang studinya masing-masing, sehingga memberikan tingkat pengetahuan dan keterampilan yang komprehensif. Selain itu, Anda masih perlu mengembangkan pengetahuan dan keterampilan Anda dengan cara mencoba menjawab latihan-latihan soal tes yang disajikan dalam setiap pembelajaran pada portal komunitas pembelajaran.

Dalam melaksanakan kegiatan belajar mandiri Anda dapat menyesuaikan waktu dan tempat sesuai dengan lingkungan masing-masing (sesuai kondisi demografi). Harapan dari penulis/kurator, Anda dapat mempelajari substansi materi bidang studi pada setiap pembelajaran yang disajikan dalam modul untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilan sehingga siap melaksanakan seleksi Guru P3K.

Selama mengimplementasikan modul ini perlu terus dilakukan refleksi, evaluasi, keberhasilan serta permasalahan. Permasalahan-permasalahan yang ditemukan dapat langsung didiskusikan dengan rekan sejawat dalam komunitas pembelajarannya masing-masing agar segera menemukan solusinya.

Capaian yang diharapkan dari penggunaan madul ini adalah terselenggaranya pembelajaran bidang studi yang optimal sehingga berdampak langsung terhadap hasil capaian seleksi Guru P3K.

Kami menyadari bahwa modul yang dikembangkan masih jauh dari kesempurnaan. Saran, masukan, dan usulan penyempurnaan dapat disampaikan kepada tim penulis/kurator melalui surat elektronik (e-mail) sangat kami harapkan dalam upaya perbaikan dan pengembangan modul-modul lainnya.

Daftar Pustaka

Agus Dwi Wibawa dan Pujiadi, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi I*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Amin Suyitno, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi D*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Angga Kristiyajati dan Fadjar Nur Hidayat, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi F*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Emi Pujiastuti, (2019). *Pendalaman Materi Matematika Modul 6 Logika Matematika*. Pendidikan Profesi Guru. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Emut dan Rosmawati, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi A*. Jakarat: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Iwan Junaedi, (2019). *Pendalaman Materi Matematika Modul 1 Geometri*. Pendidikan Profesi Guru. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kristina Wijayanti, (2019). *Pendalaman Materi Matematika Modul 2 Aljabar dan Program Linear*. Pendidikan Profesi Guru. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Markaban dan Rosmawati, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi B*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Muhammad Kharis, (2019). *Pendalaman Materi Matematika Modul 3 Kalkulus dan Trigonometri*. Pendidikan Profesi Guru. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Nuriana Rahmani Dewi, (2019). *Pendalaman Materi Matematika Modul 5 Bilangan*. Pendidikan Profesi Guru. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Scolastika Mariani, (2019). *Pendalaman Materi Matematika Modul 4 Kombinatorika dan Statistika.* Pendidikan Profesi Guru. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Sigit Tri Guntoro dan Pujiadi, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi G*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Sumadi dan Marfuah, (2020). *Modul Pelatihan Pembelajaran Berorientasi Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi Materi Kapita Selekta Matematika SMK*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Sumadi dan Sapon Suryopurnomo, (2019). *Paket Unit Pembelajaran PKB melalui Penigkatan Kompetensi Pembelajaran Mata Pelajaran Matematika SMA Unit Statistika dan Peluang*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Untung Trisna Suwadji, (2017). *Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA Kelompok Kompetensi J*. Jakarat: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Modul
Belajar Mandiri

CALON GURU

Aparatur Sipil Negara (ASN)
Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja (PPPK)