

Pembelajaran 5. DINAMIKA ROTASI

Sumber. Modul Pendidikan Profesi Guru

Modul 2. Dinamika

Penulis ; Albertus Hariwangsa Panuluh, M.Sc.

A. Kompetensi

1. Memahami konsep-konsep, hukum-hukum, dan teori-teori fisika serta penerapannya secara fleksibel.
2. Menjelaskan penerapan hukum-hukum fisika dalam teknologi terutama yang dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari.

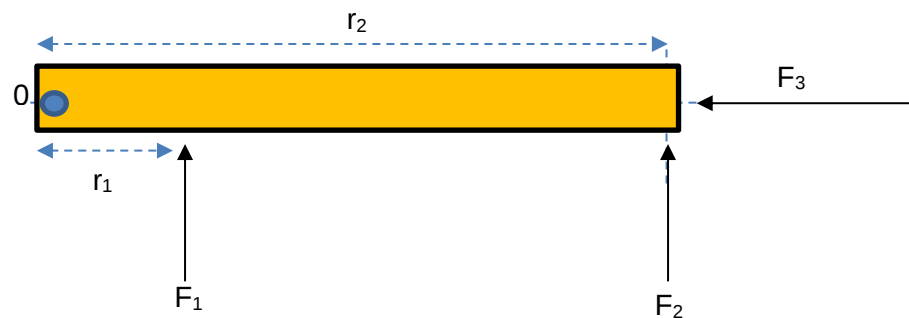
B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Membandingkan besaran pada gerak translasi dan rotasi
2. Menjelaskan konsep torsi
3. Menjelaskan konsep momen gaya
4. Menerapkan konsep momen inersia
5. Menerapkan konsep kesetimbangan benda tegar
6. Menerapkan konsep dinamika rotasi
7. Menganalisis hukum kekekalan momentum sudut

C. Uraian Materi

Dalam pembahasan mengenai Hukum Newton, telah Anda ketahui bahwa dalam resultan gaya yang bekerja pada suatu benda akan mengakibatkan perubahan percepatan pada benda tersebut. Resultan gaya tersebut akan menyebabkan terjadinya gerak bergeser suatu benda (translasi). Selain gerak translasi, dikenal pula gerak rotasi (berputar). Apakah yang dapat menyebabkan terjadinya gerak rotasi?

Gerak rotasi pun disebabkan oleh sejumlah gaya yang bekerja pada suatu benda. Bagaimanakah gaya ini dapat menyebabkan terjadinya gerak rotasi, perhatikan gambar berikut.



Gambar 46. Ilustrasi pengaruh gaya

Dari gambar diatas, 3 buah gaya bekerja pada sebuah batang/tongkat yang memiliki pusat putaran di titik O. F1 memiliki jarak sebesar r_1 terhadap titik O, F2 memiliki jarak sebesar r_2 terhadap titik O dan F3 bekerja pada tongkat namun tidak memiliki jarak terhadap titik O. Mengapa demikian?

F1 dan F2 karena memiliki jarak terhadap pusat putaran, maka akan mengakibatkan tongkat berputar. F3 tidak akan mengakibatkan tongkat berputar, karena apabila kita Tarik garis lurus, ternyata titik kerja gaya ini akan melewati pusat putaran O, sehingga dengan demikian, F3 tidak memiliki jarak terhadap pusat putaran O, tapi bekerja pada pusat putaran O.

Karena F1 dan F2 dapat mengakibatkan tongkat berputar diporosnya, maka kedua gaya tersebut dikatakan dapat menimbulkan momen gaya/torsi. Torsi dilambangkan sebagai τ , dengan persamaannya adalah :

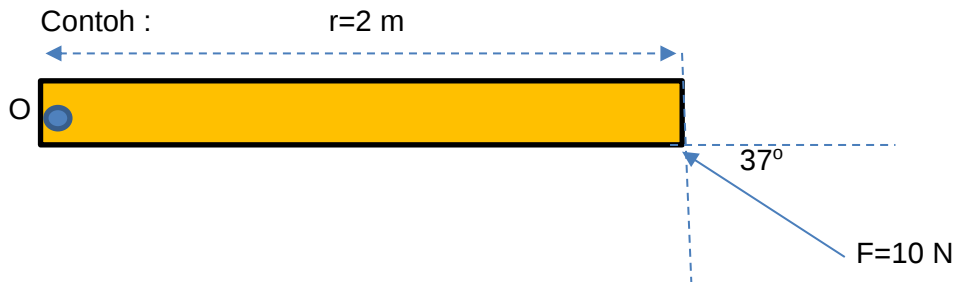
$$\tau = rF$$

Dengan τ adalah torsi/momen gaya (Nm), r adalah lengan torsi (m), dan F adalah gaya yang memiliki jarak terhadap pusat putaran (N). Karena r adalah lengan/jarak gaya (F) terhadap pusat putaran, maka posisi gaya (F) terhadap lengan (r) haruslah tegak lurus. Dengan demikian momen gaya akan memiliki arah putaran, sehingga momen gaya merupakan besaran vector. Persamaan momen gaya/torsi dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp} = rF \sin \theta$$

Dengan θ adalah sudut yang dibentuk antara r dan F .

Bagaimana dengan arah momen gaya? Secara konvensi, torsi akan bernilai positif (+) jika gaya memutar benda berlawanan arah jarum jam terhadap poros dan negatif (-) apabila gaya memutar benda searah jarum jam. Bagaimana jika gaya yang bekerja pada suatu benda membentuk suatu sudut? Perhatikan contoh berikut ini.



Tentukanlah besar momen gaya dan arahnya !

Karena gaya F membentuk sudut sebesar 37° terhadap garis horizontal, maka komponen gaya yang tegak lurus terhadap lengannya adalah :

$$F \sin 37^\circ = 10 \cdot 0,6 = 6N$$

Sehingga diperoleh momen gaya/torsinya sebesar :

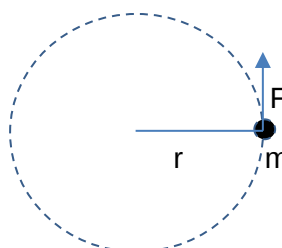
$$\tau = r \cdot F \sin 37 = 2 \cdot 6 = 12 Nm$$

Dengan arah berlawanan arah jarum jam (+)

Momen Inersia

Pada gerak translasi, percepatan linear (a) tidak hanya sebanding dengan resultan gaya ΣF namun juga berbanding terbalik dengan massa benda m .

Pertama-tama kita tinjau sebuah partikel bermassa m bergerak melingkar diikat pada tali dengan jari-jari gerak melingkar r dan terdapat gaya F yang menyinggung lintasan seperti pada Gambar berikut.



Gambar 47. ilustrasi momen gaya

Torsi yang dialami oleh benda m adalah :

$$\tau = rF$$

Bila kita masukkan persamaan gaya adalah

$$F = ma_{\perp}$$

Bila percepatan $a_{\perp}$ adalah percepatan tangensial, maka akan diperoleh :

$$a_{\perp} = \alpha r$$

Sehingga diperoleh

$$\tau = rF = rma_{\perp}$$

$$\tau = mr^2 \alpha \text{ (Nm)}$$

dengan didefinisikan mr^2 adalah suatu besaran yang menunjukkan kelembaman rotasi benda yang disebut **momen inersia**.

Momen inersia untuk system partikel

Bagaimana untuk kasus sistem partikel yang terdiri atas lebih dari satu partikel? Andaikan partikel bermassa $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$. Maka kita bisa jumlahkan torsi semua partikel. Sehingga persamaan diatas menjadi :

$$\sum \tau = (\sum mr^2) \alpha$$

Karena nilai α sama untuk semua partikel, maka persamaan momen gaya diatas akan menjadi persamaan inersia :

$$I = \sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

Maka persamaan momen gaya akan menjadi :

$$\sum \tau = I \alpha$$

Contoh :

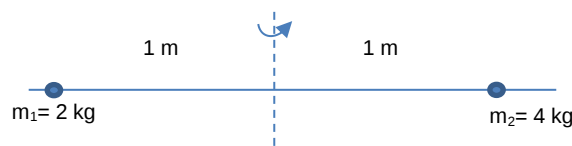
Dua buah benda bermassa 2 kg dan 4 kg terpisah sejauh 2 m yang terpasang pada suatu tongkat ringan (massa tongkat diabaikan). Hitunglah momen inersia dari sistem jika:

(a) sumbu putar terletak tepat di tengah-tengah antara kedua benda

(b) sumbu putar terletak di sejauh 1 m di sebelah kanan benda bermassa 4 kg.

Jawab:

Perhatikan gambar berikut:



Ada dua benda pada sistem, sehingga gunakan Persamaan inersia untuk mengerjakan:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (2)(1)^2 + (4)(1)^2 = 6 \text{ kgm}^2$$

Perhatikan gambar berikut:



Nilai inersia system tersebut diatas adalah:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (2)(3)^2 + (4)(1)^2 = 22 \text{ kgm}^2$$

Momen Inersia untuk benda Kontinu

Benda kontinu dapat memiliki momen inersia selama ada bagian dari benda yang berputar terhadap salah satu sisinya. Benda kontinu yang dimaksud adalah benda yang memiliki distribusi partikel secara merata, misalnya seperti tongkat, selimut bola, bola pejal, selimut silinder, silinder pejal, dan lain-lain. Perhitungan momen inersia untuk benda kontinu menggunakan operasi integral seperti berikut ini.

$$I = \int r^2 dm$$

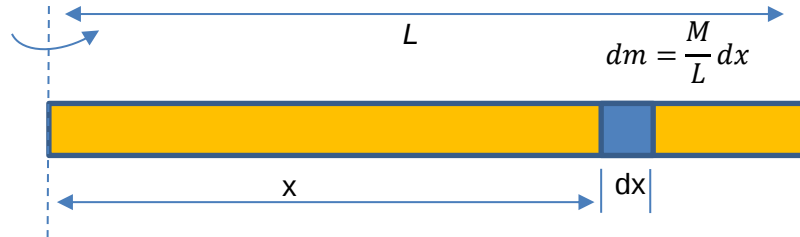
Dengan r adalah jarak elemen massa dm terhadap sumbu putar.

Contoh :

Cari momen inersia dari tongkat sepanjang L dan bermassa m yang terdistribusi merata dengan sumbu putar yang terletak pada salah satu ujung tongkat dan tegak lurus dengan tongkat!

Jawab:

Sebelumnya bila kita asumsikan bahwa tongkat adalah tipis sekali, sehingga dapat dianggap sebagai benda satu dimensi.



Gambar 5.3. Tongkat tipis yang diputar di salah ujungnya

Apabila $\lambda = \frac{M}{L}$, maka akan diperoleh persamaan

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

Sehingga bila dimasukkan kedalam persamaan integral diatas akan menjadi:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx$$

Karena jarak elemen massa dm ke pusat putaran adalah x , maka r dapat diganti menjadi x . Akibatnya persamaan diatas menjadi:

$$I = \int x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \frac{M}{L} \int x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2$$

Teorema Sumbu Sejajar

Terdapat suatu teorema yang disebut teorema sumbu sejajar. Apabila kita mengetahui nilai momen inersia suatu benda kontinu yang diputar pada sumbu yang melewati titik pusat massanya, maka kita dapat menghitung momen inersia benda tersebut apabila sumbu putar terletak sejauh h dari sumbu yang melewati pusat massanya. Apabila I_{pm} adalah momen inersia suatu benda kontinu bermassa M yang diputar pada sumbu yang melewati titik pusat massanya, maka teorema sumbu sejajar dapat dituliskan.

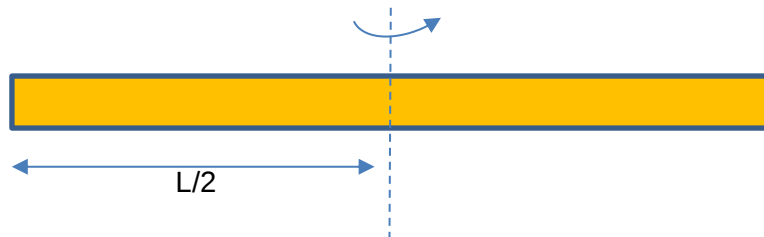
$$I = I_{pm} + Mh^2$$

Contoh :

Hitunglah momen inersia dari tongkat tipis dengan sumbu putar yang melewati pusat massanya!

Jawab :

Kita gunakan informasi momen inersia tongkat tipis yang diputar pada ujung tongkat seperti pada contoh 3 yaitu $I = \frac{1}{3}ML^2$. Letak pusat massa dari tongkat tipis adalah di tengah-tengah tongkat seperti ditunjukkan pada gambar berikut.

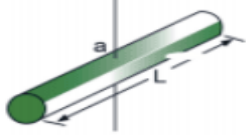
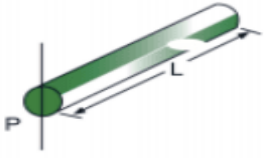
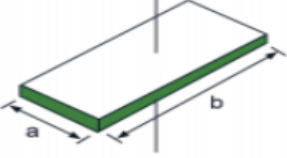
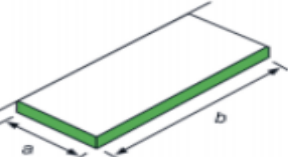
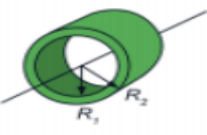
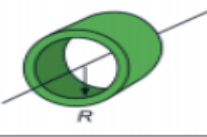


Sehingga diperoleh persamaan :

$$I = \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

Berikut ini diberikan table persamaan momen inersia untuk beberapa benda.

Tabel 3. Persamaan momen inersia

$I = \frac{1}{2}ML^2$ 	$I = \frac{1}{3}ML^2$ 	$I = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$ 
(a) Batang silinder, poros melalui pusat.	(b) Batang silinder, poros melalui ujung.	(c) Pelat segiempat, poros melalui pusat.
$I = \frac{1}{3}Ma$ 	$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ 	$I = \frac{1}{2}MR^2$ 
(d) Pelat segiempat tipis, poros sepanjang tepi.	(e) Silinder berongga.	(f) Silinder pejal.
$I = MR^2$ 	$I = \frac{2}{5}MR^2$ 	$I = \frac{2}{3}MR^2$ 
(g) Silinder tipis berongga.	(h) Bola pejal.	(i) Bola tipis berongga.

Sumber: Quipper Video

Penerapan Dinamika Rotasi

Saat anda mempelajari Modul Hukum Newton, banyak penerapan yang berkaitan dengan katrol. Namun pada saat itu massa katrol diabaikan. Padahal dalam kehidupan sehari-hari, katrol memiliki peran dengan kata lain tidak dapat diabaikan. Beberapa asumsi dilakukan yaitu tali tidak slip saat berputar bersama katrol sehingga kecepatan linear dari tali sama dengan kecepatan tangensial dari katrol. Sehingga diperoleh

$$v = R\omega$$

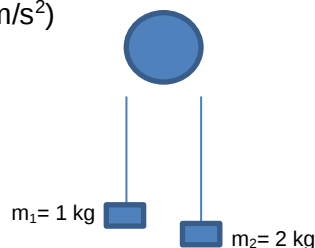
dengan v , R , dan ω adalah kecepatan tangensial katrol, jari-jari katrol dan kecepatan sudut katrol berturut-turut. Apabila Persamaan kecepatan tersebut diturunkan terhadap waktu maka diperoleh:

$$a = \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Percepatan diatas merupakan percepatan tangensial yang dapat diterapkan dalam menentukan percepatan sudut dan percepatan tangensial pada system katrol.

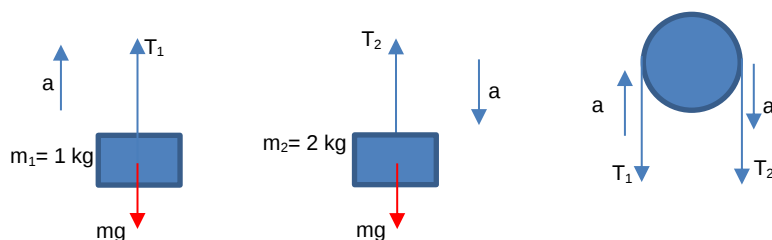
Contoh:

Pada gambar berikut terdapat system katrol yang dibebani oleh dua buah benda yang dihubungkan dengan tali. Massa masing-masing benda adalah 1 kg dan 2 kg. Bila jari-jari katrol 10 cm, massa katrol 2 kg, tentukanlah percepatan system katrol tersebut ! ($g=10\text{m/s}^2$)



Jawab :

Karena m_2 lebih besar massanya dibandingkan m_1 , maka katrol akan berputar ke arah kanan. Bila dibuat Analisa gambarnya adalah sebagai berikut.



Untuk benda 1, berlaku Hukum 2 Newton:

$$\sum F = m \cdot a$$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$T_1 = m_1 a + m_1 g$$

Untuk benda 2, berlaku juga Hukum 2 Newton :

$$\sum F = m \cdot a$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 g - m_2 a$$

Pada katrol akan berlaku persamaan dinamika rotasi, sebagai berikut:

$$\sum \tau = \sum FR = I\alpha$$

$$(T_2 - T_1)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

Kemudian, kita masukkan persamaan T1, T2 dan α , maka akan diperoleh:

$$((m_2 g - m_2 a) - (m_1 a + m_1 g))R = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R}$$

Akan diperoleh persamaan:

$$m_2 g - m_1 g = \frac{1}{2}Ma + m_1 a + m_2 a$$

$$(m_2 - m_1)g = \left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)}$$

$$a = \frac{(2 - 1)10}{\left(\frac{1}{2}2 + 1 + 2\right)} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Gerak Menggelinding

Gerak Menggelinding berbeda dengan gerak rotasi. Suatu benda dikatakan berotasi bila benda tersebut berputar pada satu titik dan tidak mengalami perpindahan tempat, sedangkan benda akan dikatakan bergerak menggelinding bila berputar pada satu titik sumbu putar namun juga mengalami perpindahan tempat. Akibatnya benda yang menggelinding akan memiliki jarak tempuh selama ia berotasi pada sumbu putarnya. Misal : jarum jam yang berputar merupakan gerak rotasi, sedangkan roda pada kendaraan yang bergerak mengalami gerak menggelinding.

Benda yang bergerak menggelinding dapat juga disebut mengalami gerak rotasi (berputar pada sumbu) dan translasi (perpindahan). Gerak menggelinding adalah hasil jumlahan atau superposisi dari gerak translasi dan gerak rotasi. Bila benda hanya bergerak translasi maka kecepatan dari setiap titik pada benda sebesar kecepatan pusat massa $\vec{v}_{pm}$. Benda hanya bergerak rotasi terhadap pusat massa, maka bila jari-jarinya R ; kecepatan pusat massanya adalah : $v = R\omega$. Untuk benda menggelinding yang tak lain adalah penjumlahan antara gerak translasi dan rotasi, Energi kinetik totalnya merupakan penjumlahan dari energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi.

$$Ek = Ek_{rotasi} + Ek_{translasi} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Contoh :

Sebuah bola pejal bermassa 1 kg dan berjari-jari 10 cm bergerak menggelinding tanpa slip dengan kelajuan pusat massa 2 m/s. Hitung energi kinetik total dari bola pejal tersebut!

Jawab :

Momen inersia bola pejal : $I = \frac{2}{5}MR^2$

Kecepatan sudut benda : $\omega = \frac{v}{R}$

Energi kinetik total :

$$Ek = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}MR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

Diperoleh persamaan : $Ek = \frac{1}{5}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{7}{10}Mv^2$

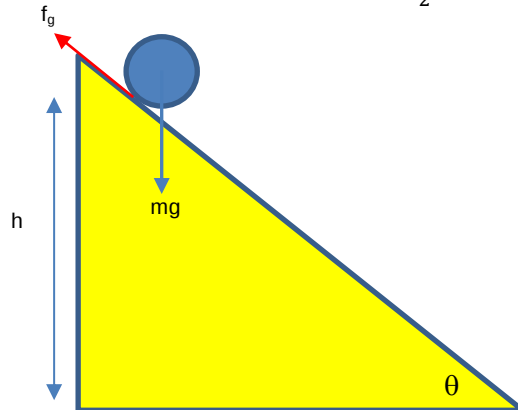
Sehingga nilai energi kinetik totalnya adalah : $Ek = \frac{7}{10} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2,8 J$

Contoh :

Sebuah silinder pejal bermassa m dan jari-jari R menggelinding tanpa slip menuruni bidang miring kasar dengan kemiringan θ . Hitung percepatan pusat massa yang dialami silinder tersebut

Jawab :

Momen inersia untuk silinder pejal : $I = \frac{1}{2}mR^2$

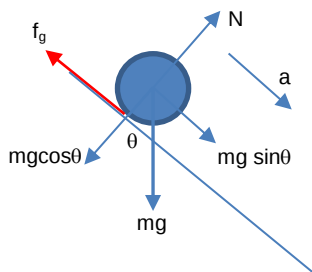


Pada benda akan bekerja gaya gesek (f_g) yang arahnya berlawanan dengan arah gerak benda. Bila kita membuka Kembali konsep mengenai gaya gesek, maka akan diperoleh persamaan gaya gesek adalah:

$$f_g = \mu N$$

Dengan, μ adalah koefisien gesek dan N adalah gaya normal.

Perhatikan gambar berikut, bila kita gaya yang bekerja pada benda dianalisis:



Diperoleh :

$$f_g = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \cos \theta$$

$$\sum F = ma$$

$$mg \sin \theta - f_g = ma$$

Gerak rotasi dan translasi yang terjadi mengakibatkan berlakunya :

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$f_g R = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a}{R}$$

$$f_g = \frac{1}{2}ma$$

Bila persamaan gaya gesek dimasukkan ke persamaan di atasnya, maka akan diperoleh:

$$mg \sin\theta - \frac{1}{2}ma = ma$$

Diperoleh persamaan untuk percepatan a :

$$a = \frac{2}{3}g \sin\theta$$

Persamaan percepatan tersebut berlaku untuk benda yang menggelinding pada bidang miring tanpa mengalami slip.

Contoh :

Hitung kecepatan pusat massa dari silinder pejal pada dasar bidang miring seperti pada contoh soal diatas ! Silinder tersebut mulai menggelinding dari ketinggian h .

Jawab :

Untuk menyelesaikan soal ini, maka kita bisa menggunakan Hukum Kekekalan energi dengan acuan posisi awal benda adalah pada ketinggian h dan posisi akhir benda ada di dasar bidang miring.

$$Ek_1 + Ep_1 = Ek_2 + Ep_2$$

Saat titik awal (posisi 1), benda dalam keadaan diam, sehingga energi kinetiknya nol. Setelah mencapai dasar bidang miring (posisi 2), energi potensial benda nol karena sudah tidak memiliki ketinggian h , namun energi kinetiknya adalah energi kinetik total (rotasi dan translasi).

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2$$

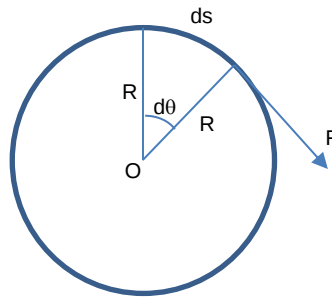
$$gh = \frac{3}{4}v^2$$

Maka kecepatan benda di dasar bidang miring adalah :

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Usaha dan Daya pada Gerak Rotasi

Perhatikanlah gambar dibawah, bila gambar berikut adalah sebuah cakram yang diberi gaya singgung F .



Gambar 48

Misalkan suatu gaya tangensial $\vec{F}$ bekerja pada tepi suatu cakram yang berputar dengan sumbu rotasi tepat pada pusat cakram. Selama selang waktu dt cakram berputar sejauh $d\theta$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar diatas. Usaha dW yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}_{tan}$ untuk memutar cakram tersebut sejauh ds adalah $dW = F_{tan}ds$, dengan $ds = R d\theta$ sehingga $dW = F_{tan}R d\theta$. Hasil kali $F_{tan}R$ tak lain adalah momen gaya τ , sehingga

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Sehingga, bila momen gaya bukan merupakan fungsi dari θ , maka persamaan diatas menjadi

$$W = \tau(\theta_2 - \theta_1) = \tau \Delta\theta \text{ (joule)}$$

Dari persamaan sebelumnya, yaitu :

$$\tau = I\alpha$$

Bila percepatan sudut (α) terjadi akibat adanya perubahan kecepatan sudut dalam selang waktu tertentu : $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, maka persamaan momen gaya menjadi :

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt}$$

Sehingga :

$$\tau d\theta = I \frac{d\omega}{dt} d\theta = I \frac{d\theta}{dt} d\omega$$

Akibatnya:

$$\tau d\theta = I\omega d\omega$$
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$$

Diperoleh persamaan usaha pada dinamika rotasi:

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa usaha yang terjadi pada dinamika rotasi merupakan perubahan dari energi kinetik rotasinya.

Dari persamaan usaha dinamika rotasi tersebut, dapat juga diperoleh energi tiap waktu (daya) yang dihasilkan oleh benda dengan menurunkan persamaan energi berikut:

$$W = \tau \Delta\theta$$
$$\frac{W}{\Delta t} = \tau \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Diperoleh daya :

$$P = \tau \omega \text{ (watt)}$$

Contoh:

Sebuah motor listrik memberikan suatu momen gaya konstan sebesar 6 Nm pada suatu gerinda yang memiliki momen inersia 2 kg.m/s². Apabila sistem tersebut mula-mula diam, hitunglah: a) usaha dan energi kinetik sistem setelah 10 s; b) Daya yang diberikan oleh motor.

Jawab :

Diketahui : $\tau = 6 \text{ Nm}$, $\omega_1 = 0$, $t = 10 \text{ s}$, $I = 2 \text{ kgm/s}^2$, dapat diperoleh percepatan sudut : $\alpha = \frac{\tau}{I}$. Sehingga akan diperoleh nilai percepatan sudut 3 rad/s².

Untuk mendapatkan usaha, maka kita harus mendapatkan nilai perubahan sudut terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan :

$$\Delta\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 = 150 \text{ rad}$$

Usaha setelah 10 s ;

$$W = 6 \cdot 150 = 900 \text{ Joule}$$

Energi kinetik setelah 10 s ($E_{k_{rot1}} = 0$):

$$W = \Delta E_{k_{rot}} = E_{k_{rot2}} - E_{k_{rot1}}$$

Maka diperoleh : $W = \Delta E_{k_{rot}} = 900 \text{ joule}$

Daya yang diberikan : $P = \frac{W}{t} = \frac{900}{10} = 90 \text{ Watt}$

Momentum Sudut (L)

Momentum sudut merupakan momentum yang dimiliki oleh suatu benda bermassa m dan berputar dengan kecepatan sudut sebesar ω . Oleh karena itu, momentum sudut dapat juga dianalogikan sebagai momentum linear (p). Sehingga persamaan dari momentum sudut adalah:

$$L = r \times p$$

Dengan persamaan momentum linear p adalah: $p = mv$

Maka persamaan momentum sudut menjadi:

$$L = r \times mv$$

Bila persamaan kecepatan v adalah: $v = \omega r$, maka:

$$L = r \times m\omega r = mr^2\omega = I\omega$$

Hukum Kekekalan Momentum Sudut

Dalam gerak translasi dikenal istilah kekekalan momentum, pada gerak rotasi juga mengenal adanya hukum kekekalan momentum sudut. Bunyi hukum kekekalan momentum berbunyi sebagai berikut:

“Apabila resultan momen gaya yang bekerja pada sistem adalah nol, maka momentum sudut sistem akan konstan”

Secara matematis dapat dituliskan

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

Berarti tidak terjadi perubahan momentum tiap waktu, sehingga bisa dituliskan:

$$L_{awal} = L_{akhir}$$

Contoh :

Dua buah cakram masing-masing memiliki momen inersia I_A dan I_B berputar pada poros yang sama masing-masing ω_A dan ω_B yang arahnya searah. Cakram A kemudian bersatu dengan cakram B menghasilkan kecepatan sudut akhir ω . Hitunglah nilai ω yang dinyatakan dalam variabel yang diketahui!

Jawab :

Hukum Kekekalan momentum sudut :

$$\begin{aligned} L_{awal} &= L_{akhir} \\ I_1\omega_1 + I_2\omega_2 &= (I_1 + I_2)\omega \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

Berikut ini adalah table yang menunjukkan relasi antara besaran yang digunakan pada translasi dan rotasi.

Tabel 4. Relasi antar besaran

No	Besaran	translasi	rotasi	Relasi
1	Perpindahan	x	θ	$x=r\theta$
2	Kecepatan	v	ω	$v=r\omega$
3	Percepatan	a	α	$a=r\alpha$
4	Persamaan kinematika	$v = v_0 + at$ $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2as$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	
5	Massa	m	I	$I = mr^2$
6	Momentum	$p=mv$	$L=I\omega$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
7	Gaya	$F=ma$	$\tau = I\alpha$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
8	Energi kinetik	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{k_{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$	

Keseimbangan Benda Tegar

Telah diketahui sebelumnya bahwa sebuah benda dikatakan dalam keadaan setimbang bila pada benda tersebut resultan gayanya nol ($\sum F = 0$). Selanjutnya kesetimbangan ini disebut sebagai kesetimbangan translasi. Hal yang sama juga berlaku untuk benda yang berotasi, benda tersebut akan dikatakan berada dalam kesetimbangan rotasi bila resultan momen gayanya nol ($\sum \tau = 0$).

Sehingga bila suatu benda ingin benar-benar dikatakan berada dalam kesetimbangan, maka harus dipenuhi persyaratan

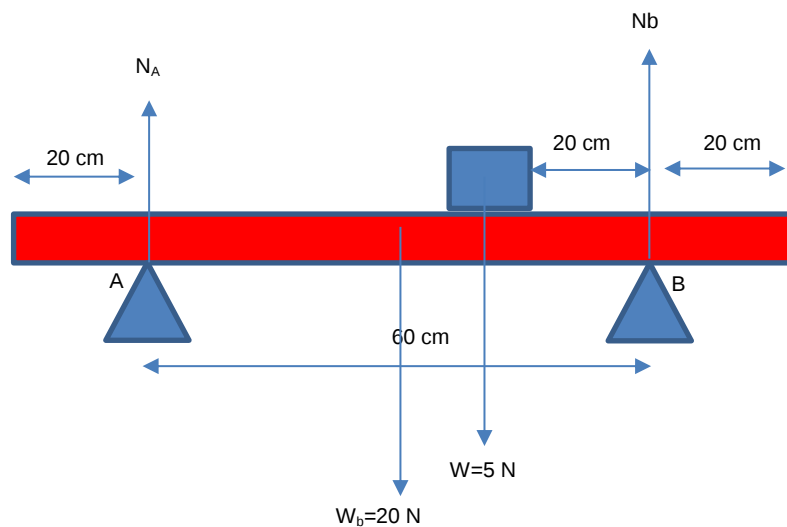
1. $\sum F = 0$, berada dalam kesetimbangan translasi
2. $\sum \tau = 0$, berada dalam kesetimbangan rotasi

Selanjutnya dapat pula ditentukan bahwa bila momen gaya memiliki putaran searah jarum jam bernilai negative, dan bernilai positif bila berputar berlawanan arah jarum jam.

Contoh:

Sebuah batang homogen dengan panjang $L = 1 \text{ m}$ dan massa $M = 2 \text{ kg}$ diletakkan di dua buah poros A dan B yang masing-masing berjarak 20 cm dari ujung kiri dan kanan batang. Sebuah balok bermassa 500 g diletakkan di atas batang sejauh 20 cm dari poros B. Hitung gaya normal pada poros A! ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Jawab:



Gaya normal di B (N_b) tidak mempengaruhi gerak rotasi, karena N_b bekerja di titik putaran sehingga jaraknya nol terhadap B.

Sehingga bila menggunakan kesetimbangan rotasi, maka akan diperoleh :

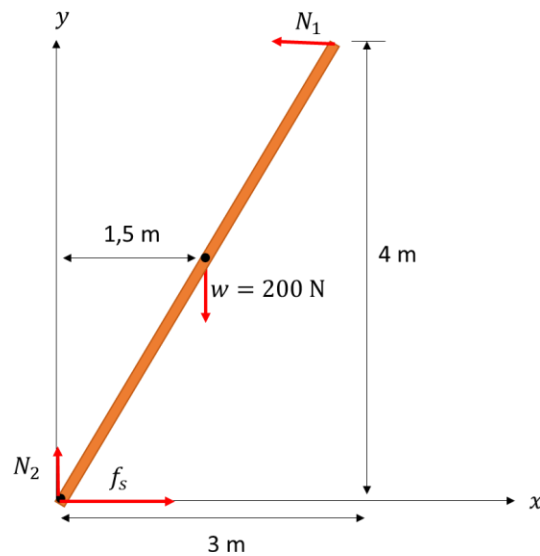
$$\begin{aligned}\sum \tau_B &= W_b \cdot 0,3 + W \cdot 0,2 - N_A \cdot 0,6 = 0 \\ N_A \cdot 0,2 &= W_b \cdot 0,3 + W \cdot 0,2 = 20 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 \\ N_A &= \frac{7}{0,2} = 35 \text{ N}\end{aligned}$$

Contoh :

Sebuah tangga yang memiliki panjang 5 m dan berat 200 N bersandar pada dinding yang licin dan kaki tangga berjarak 3 m dari dinding. Hitung: (a) Gaya normal dan gaya gesek yang dialami kaki tangga; (b) Koefisien gesek statis minimum pada kaki tangga supaya tangga tidak jatuh

Jawab:

Kita gambar diagram gaya dari kasus yang ada pada contoh soal.



Titik berat dari tangga berada di tengah-tengah tangga dengan jarak 3m dari kaki tangga.

Kita gunakan Persamaan (3.29) untuk arah sumbu-x dan sumbu-y

$$\Sigma F_x = 0$$

$$f_s - N_1 = 0$$

$$f_s = N_1$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_2 - w = 0$$

$$N_2 = w = 200 \text{ N}$$

Sehingga diperoleh $N_2 = 200 \text{ N}$.

Gunakan kekekalan rotasi dengan membuat titik di kaki tangga sebagai poros

$$\Sigma \tau = 0$$

$$N_1(4) - 200(1,5) = 0$$

$$4N_1 = 300$$

$$N_1 = 75 \text{ N}$$

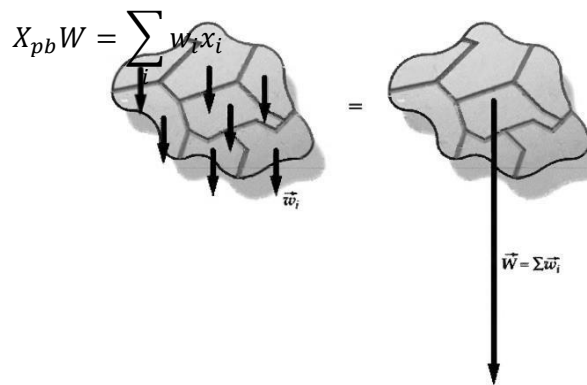
Sehingga gaya gesek statis diperoleh $f_s = N_1 = 75 \text{ N}$

Kita gunakan : $f_s = \mu_s N_2$, sehingga diperoleh :

$$\mu_s = \frac{f_s}{N_2} = \frac{75}{200} = 0,375$$

Titik Berat

Telah Anda ketahui bahwa salah satu gaya yang bekerja pada benda tersebut adalah gaya berat. Patut diingat bahwa gaya berat bekerja pada setiap titik pada benda tegar. Namun, akan lebih mudah apabila diasumsikan bahwa seluruh gaya berat dari benda terkonsentrasi pada satu titik yang disebut **titik berat** dari benda. Jika X_{pg} merupakan letak titik berat pada sumbu-x terhadap titik awal O , maka



persamaan pusat gravitasi adalah

Gambar 5.5. Berat dari suatu benda dapat dikonsentrasikan terletak pada pusat gravitasinya (Gambar: Tipler, 2003).

Apabila percepatan gravitasi konstan di setiap titik pada benda, maka dengan menuliskan $W = Mg$ dan $w_i = m_i g$, Persamaan dapat dituliskan menjadi

$$MX_{pg} = \sum_i m_i x_i$$

yang tak lain merupakan persamaan pusat massa dari benda. Sehingga dapat disimpulkan letak pusat gravitasi dan pusat massa akan sama apabila percepatan gravitasi tersebut uniform.

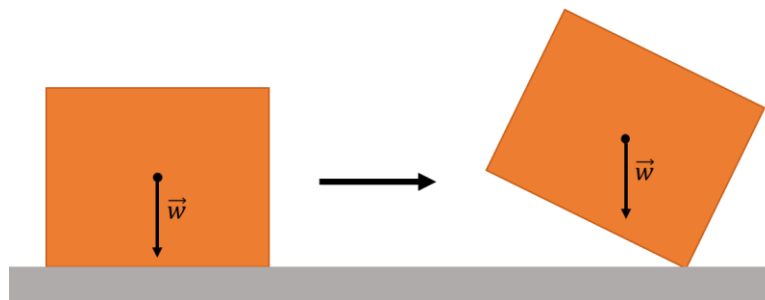
Apabila kita ambil titik asal O adalah pusat gravitasi $X_{pg} = 0$, maka dengan menuliskan $W=Mg$ dan $w = mg$, maka dapat dituliskan :

$$MX_{pg} = \sum_i m_i x_i = 0$$

Persamaan diatas merupakan persamaan pusat massa benda. Sehingga dapat disimpulkan letak pusat gravitasi dan pusat massa akan sama apabila percepatan gravitasi tersebut uniform. Titik pusat massa merupakan titik dimana semua gaya berat yang bekerja pada titik tersebut menghasilkan momen gaya yang bernilai nol.

Kestabilan Benda

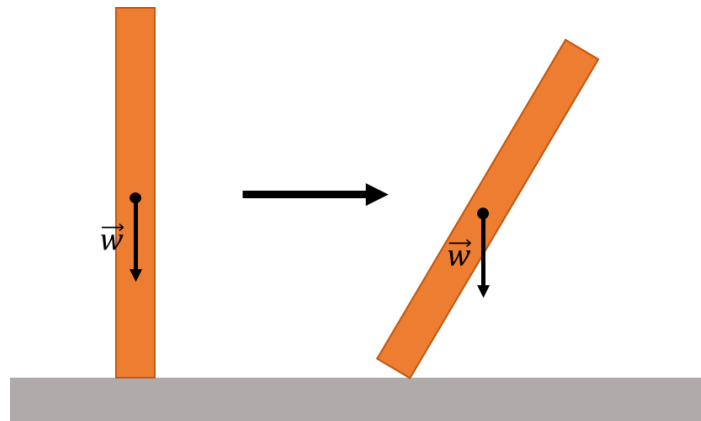
Terdapat tiga jenis kestabilan benda yaitu: stabil, tidak stabil, dan netral. **Kesetimbangan stabil** terjadi apabila meskipun benda diberi perubahan sudut atau gerak rotasi, benda akan kembali kepada keadaan awalnya. Kestimbangan stabil diilustrasikan pada gambar dibawah.



Gambar 5.6. Benda dikatakan setimbang stabil.

Momen gaya akibat sedikit rotasi lah yang menyebabkan benda kembali pada keadaan setimbang. Gerakan rotasi ini menaikkan pusat gravitasi dari benda sehingga energi potensial gravitasi benda bertambah.

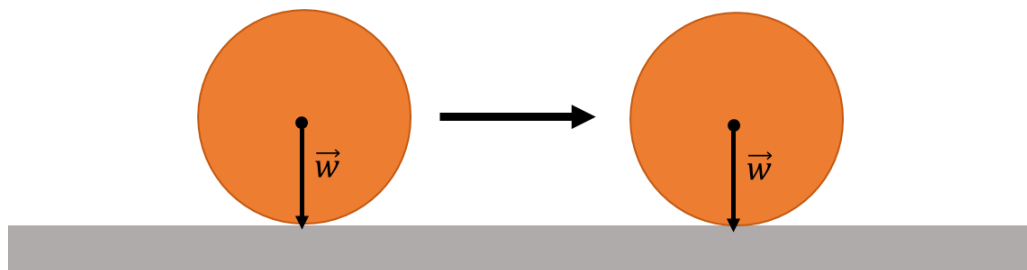
Kesetimbangan tidak stabil terjadi apabila benda diberi perubahan sudut atau gerak rotasi, benda tidak kembali ke keadaan awalnya. Kestimbangan tidak stabil diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 5.7. Benda dikatakan setimbang tidak stabil

Momen gaya akibat rotasi yang menyebabkan benda tidak kembali pada keadaan setimbang. Gerakan rotasi ini menurunkan pusat gravitasi dari benda sehingga energi potensial gravitasi benda berkurang.

Sebuah silinder yang terletak pada bidang datar mula-mula diam. Kemudian anda beri rotasi sedikit, maka tidak ada gaya atau momen gaya yang menyebabkan benda kembali ke posisi awalnya maupun menjauhi posisi awalnya. Kasus ini disebut **kesetimbangan netral**. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.8. Benda dikatakan setimbang netral.

Tinggi dari pusat gravitasi silinder tidak berubah (tingginya sama), sehingga tidak ada perubahan energi potensial gravitasinya.

Dapat disimpulkan bahwa apabila suatu benda sedikit diganggu dari keadaan awalnya yang setimbang, benda dikatakan setimbang stabil jika benda akan kembali pada keadaan awalnya, benda dikatakan setimbang tidak stabil jika benda akan bergerak semakin jauh dari keadaan awalnya, dan benda dikatakan setimbang netral jika tidak ada gaya atau momen gaya yang bekerja pada benda yang menyebabkan benda kembali atau

menjauhi keadaan awalnya. Dapat disimpulkan bahwa apabila suatu benda sedikit diganggu dari keadaan awalnya yang setimbang, benda dikatakan setimbang stabil jika benda akan kembali pada keadaan awalnya, benda dikatakan setimbang tidak stabil jika benda akan bergerak semakin jauh dari keadaan awalnya, dan benda dikatakan setimbang netral jika tidak ada gaya atau momen gaya yang bekerja pada benda yang menyebabkan benda kembali atau menjauhi keadaan awalnya

D. Rangkuman

Momen gaya merupakan suatu besaran yang merupakan analogi bagi gaya dalam gerak rotasi. Momen gaya merupakan besaran yang digunakan untuk mengukur gaya untuk mengubah gerakan rotasi benda. Jika $\vec{r}$ adalah vektor posisi titik tangkap gaya $\vec{F}$ dari poros, maka momen gaya $\vec{\tau}$ secara vektor dituliskan sebagai

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ukuran kelembaman suatu benda untuk melakukan gerak rotasi disebut Momen Inersia (I). Momen inersia untuk sistem partikel dapat dituliskan

$$I = \sum mr^2$$

Sedangkan momen inersia untuk benda yang terdistribusi kontinu adalah

$$I = \int r^2 dm$$

Hubungan antara momen gaya dan percepatan sudut adalah

$$\sum \tau = I\alpha$$

Sebuah benda tegar terdiri atas banyak partikel. Energi kinetik benda yang berotasi adalah :

$$Ek = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Energi kinetik untuk benda yang bergerak menggelinding tanpa mengalami slip adalah :

$$Ek_{tot} = Ek_{rotasi} + Ek_{translasi}$$

Usaha yang dilakukan oleh momen gaya :

$$W = \tau \Delta \theta$$

Momentum sudut ($\vec{L}$) merupakan analogi dari momentum linear ($\vec{p}$). Persamaan dari momentum sudut adalah

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Benda dikatakan setimbang apabila memenuhi dua syarat berikut:

Resultan momen gaya yang bekerja pada setiap titik pada benda haruslah nol.

$$\Sigma \vec{\tau} = 0$$

Pusat gravitasi adalah titik dimana seluruh gaya berat pada benda terkonsentrasi.

Persamaannya adalah sebagai berikut

$$X_{pb} W = \sum w_i x_i$$

Benda dikatakan setimbang stabil jika benda akan kembali pada keadaan awalnya, benda dikatakan setimbang tidak stabil jika benda akan bergerak semakin jauh dari keadaan awalnya, dan benda dikatakan setimbang netral jika tidak ada gaya atau momen gaya yang bekerja pada benda yang menyebabkan benda kembali atau menjauhi keadaan awalnya.